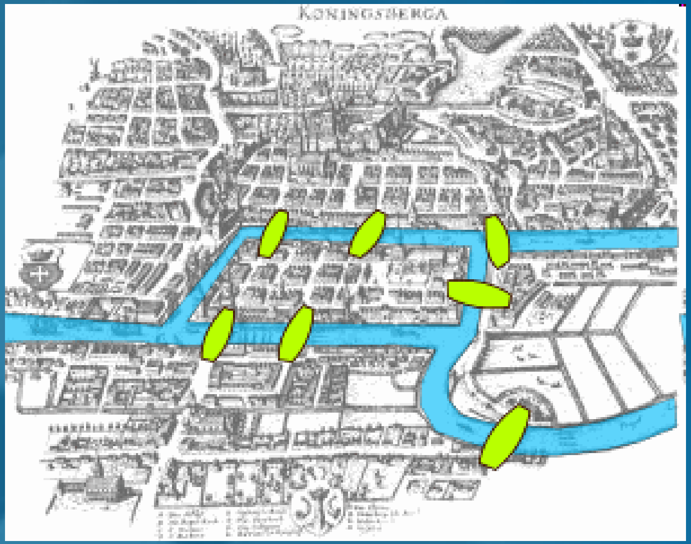
Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 11
Grafi: definizioni fondamentali

Origini storiche

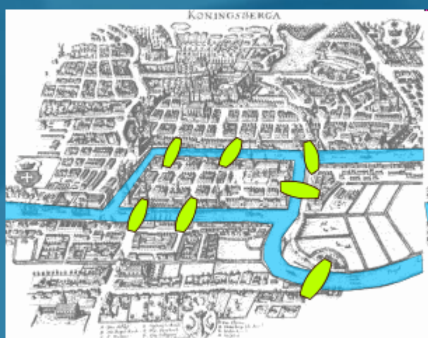
Nel 1736, il matematico svizzero Eulero [1707-1783], affrontò l'annoso problema dei 7 ponti di Königsberg (Prussia):

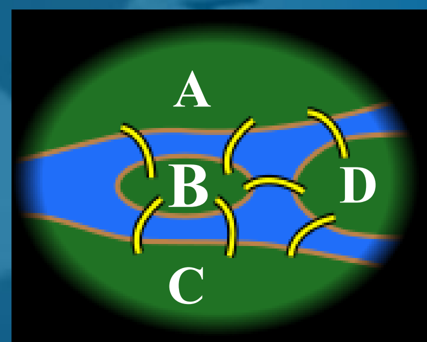


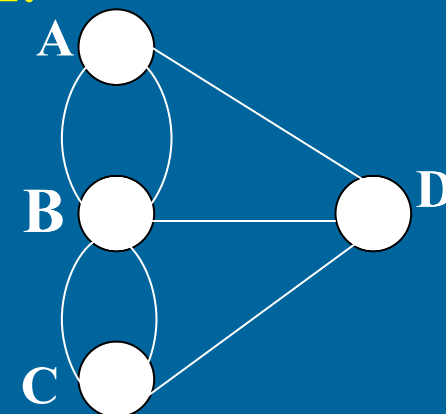
È possibile o meno fare una passeggiata che parta da un qualsiasi punto della città e percorra una ed una sola volta ciascuno dei 7 ponti?

Origini storiche (2)

Eulero affrontò il problema schematizzando topologicamente la pianta della città, epurando così l’istanza da insignificanti dettagli topografici:







…e così Königsberg venne rappresentata con un insieme di 4 punti (uno per ciascuna zona della città), opportunamente uniti da 7 linee (una per ciascun ponte)

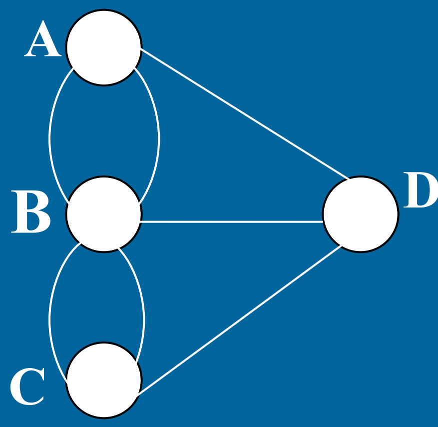
Definizione di grafo

Un grafo $G=(V,E)$ consiste in:

- un insieme $V=\{v_1,\ldots, v_n\}$ di vertici (o nodi);

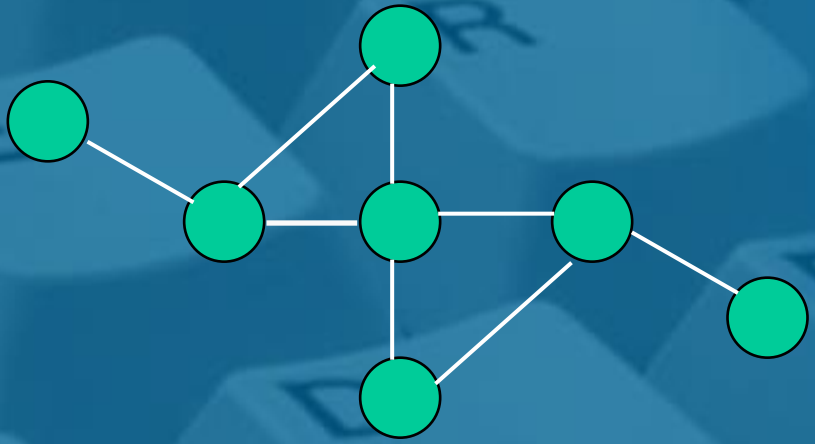
- un insieme $E=\{(v_i,v_j) \mid v_i,v_j \in V\}$ di coppie (non ordinate) di vertici, detti archi.

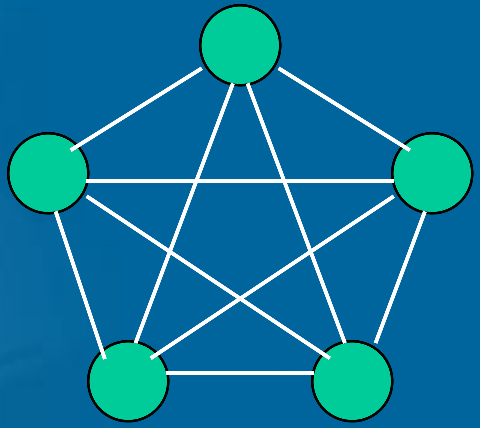
Esempio: Grafo di Eulero associato alla città di Königsberg: $V=\{A,B,C,D\}$, $E=\{(A,B), (A,B), (A,D), (B,C), (B,C), (B,D), (C,D)\}$

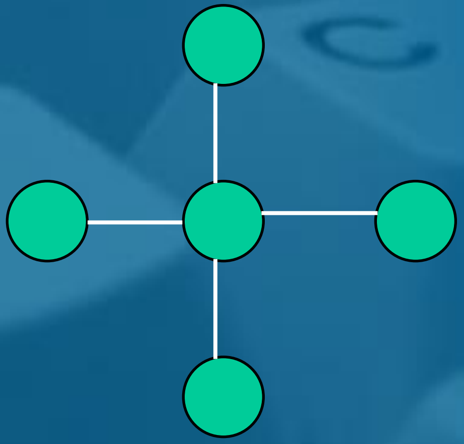


Nota: È più propriamente detto multigrafo, in quanto contiene archi paralleli.

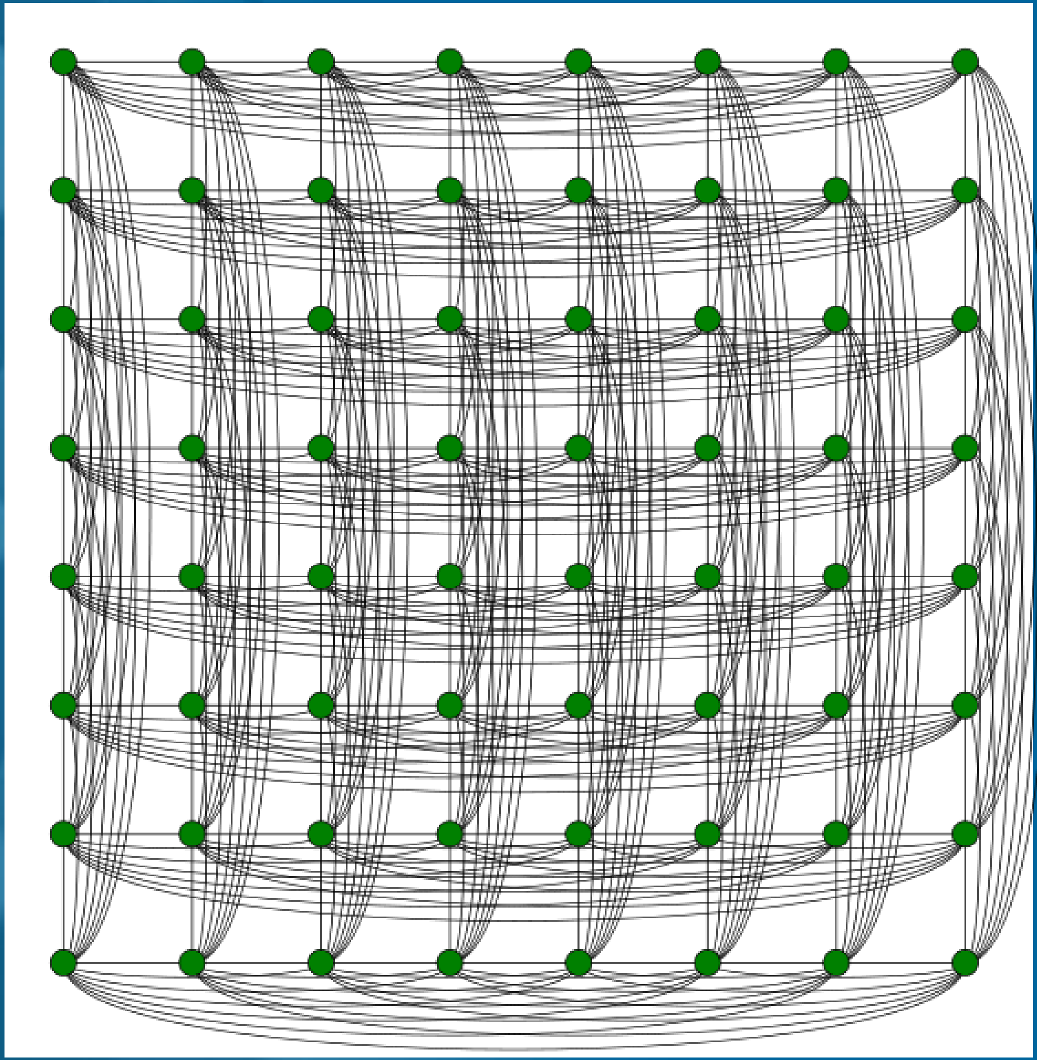
Alcuni esempi







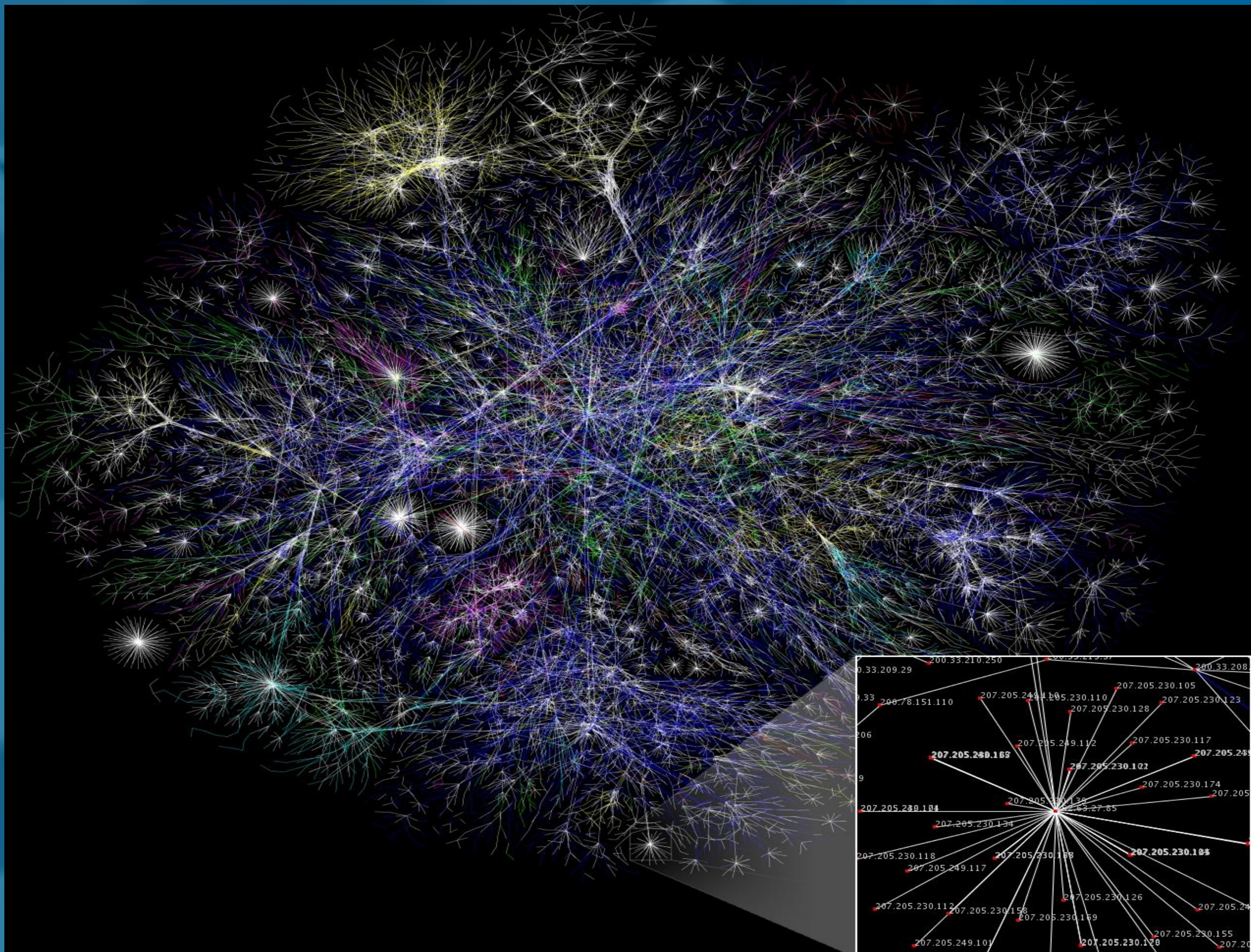
Un altro esempio: Rook’s Graph



un nodo per ogni posizione della scacchiera

c’è un arco fra due nodi/posizioni se e solo se una torre può spostarsi dall’una all’altra posizione

Un grafo più complesso: Internet



V:= insieme dei nodi terminali e di transito connessi alla rete

E:= insieme delle coppie (x,y) tali che il nodo x ha un collegamento fisico con il nodo y

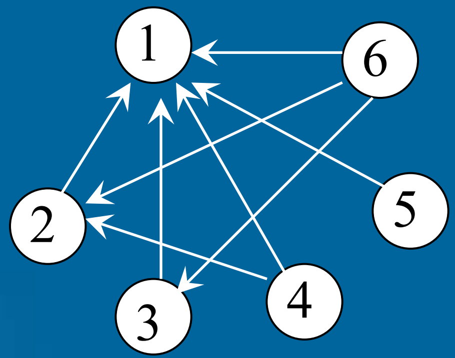
Stima # nodi ed archi di Internet: ordine di 1 miliardo

Definizione di grafo diretto

Un grafo diretto $D=(V,A)$ consiste in:

- un insieme $V=\{v_1,\dots, v_n\}$ di vertici (o nodi);
- un insieme $A=\{(v_i,v_j) \mid v_i,v_j \in V\}$ di coppie ordinate di vertici, detti archi diretti.

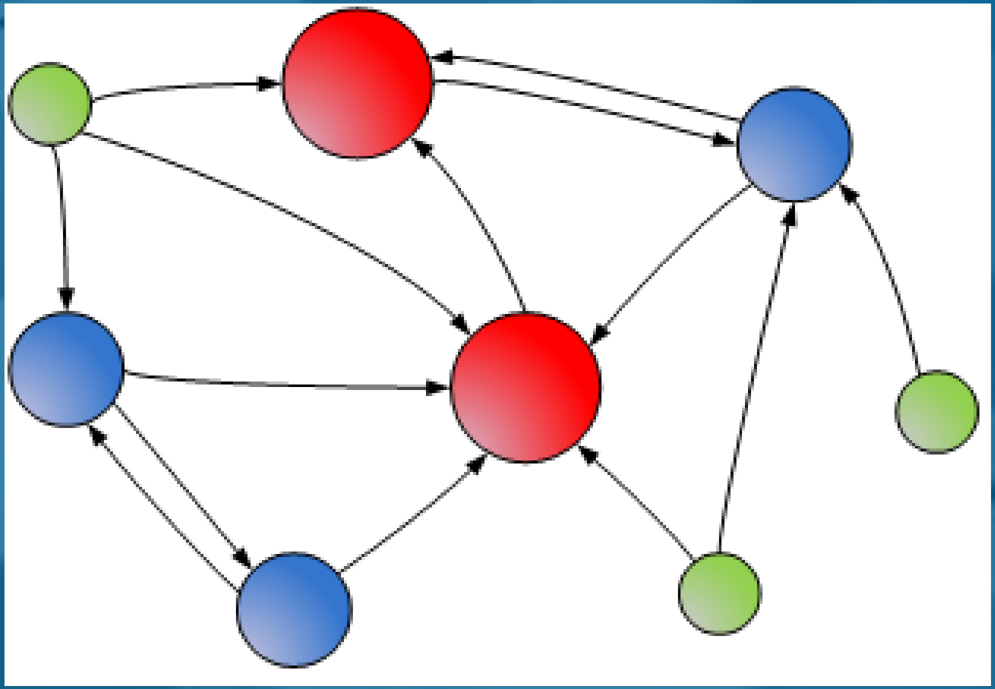
Esempio: Disegnare il grafo diretto che ha come vertici i primi 6 numeri interi, e ha un arco diretto da x verso y se $x \neq y$ e x è un multiplo di y



$\Rightarrow V=\{1,\dots,6\}$, $A=\{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (4,2), (6,2),(6,3)\}$

Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

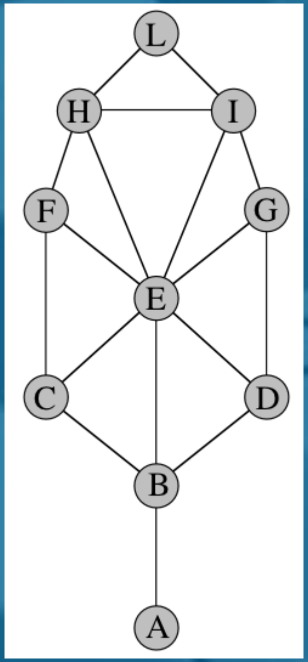
Un grafo diretto più complesso: Webgraph



V:= insieme dei siti web
A:= insieme delle coppie (x,y) tali che il sito x ha un collegamento ipertestuale al sito y (si notino l'orientamento e l'esistenza di nodi senza archi entranti)

Stima # nodi ed archi del Webgraph: circa 600 milioni di nodi e ordine di centinaia di miliardi di archi

Terminologia (1/4)



Esempio: Sia G=(V,E) un grafo (non diretto) con V={A,B,C,D,E,F,G,H,I,L}, ed E={(A,B),(B,C),(B,D),(B,E),(C,E) ,(C,F),(D,E),(D,G),(E,F),(E,G),(E,H) ,(E,I),(F,H),(G,I),(H,I) ,(H,L),(I,L)}

n = numero di vertici (nell'esempio, n=10)

m = numero di archi (nell'esempio, m=17)

Due nodi sono detti adiacenti se sono collegati da un arco (ad es., L ed I)

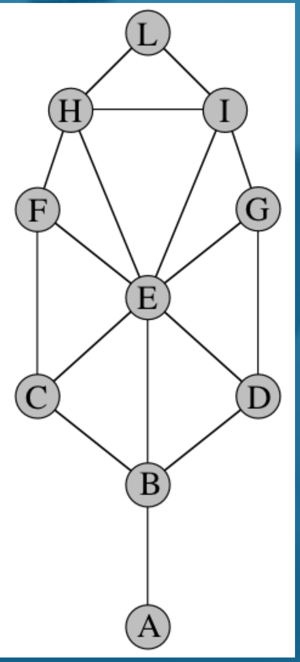
(L,I) è incidente ad L e ad I (detti estremi)

I ha grado 4: $\delta(I)=4$ ⇒ $\sum_{v \in V} \delta(v)=2m$

Il grafo ha grado 7 = $\max_{v \in V}\{\delta(v)\}$

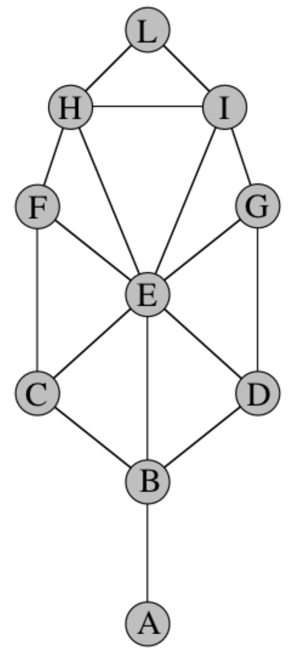
Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

Terminologia (2/4)



- Un cammino semplice in G=(V,E) tra una coppia di nodi (x,y) è una sequenza di nodi $<v_0=x, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k=y>$ **distinti** (cioè, senza nodi ripetuti) e sequenzialmente **adiacenti** (cioè, $(v_i,v_{i+1}) \in E$ per $i=0,\ldots,k-1$) che parte da x e arriva in y.
- La lunghezza di un cammino è data dal numero di archi che lo compongono. Ad esempio, <L,I,E,C,B,A> è un cammino semplice di lunghezza 5 tra L ed A
- Se il grafo è diretto, il cammino deve rispettare il verso di orientamento degli archi
- La lunghezza del più corto cammino tra due vertici si dice *distanza* tra i due vertici: ad esempio, L ed I hanno distanza 1, mentre L ed A hanno distanza 4. In particolare, un nodo è a distanza 0 da se stesso

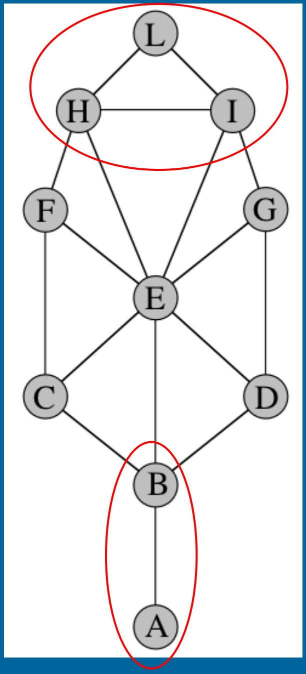
Terminologia (3/4)



- Il diametro di un grafo è la massima distanza tra due vertici del grafo; ad esempio, il grafo in figura ha diametro 4 (distanza tra L e A)
- Se esiste un cammino per ogni coppia di vertici, allora il grafo si dice connesso, altrimenti si dice disconnesso
- Un grafo disconnesso ha diametro infinito
- Un cammino chiuso, ovvero un cammino da un vertice a se stesso si dice ciclo (ad esempio, <L,I,E,H,L> è un ciclo)

Terminologia (4/4)

- Un grafo $H=(V',E')$ è un sottografo di $G=(V,E)$ $\Leftrightarrow$ $V'\subseteq V$ e $E'\subseteq E$.
- Sottografi degeneri di G: $H=\phi$ e $H=G$
- Dato un grafo $G=(V,E)$, il sottografo indotto da un insieme di vertici $V'\subseteq V$ è il grafo $H[V']=(V',E')$ ove $E'=\{(x,y)\in E \text{ t.c. } x,y \in V'\}$.
  - ad esempio, il sottografo indotto da $V'=\{L,H,I,B,A\}$ nel nostro grafo è:

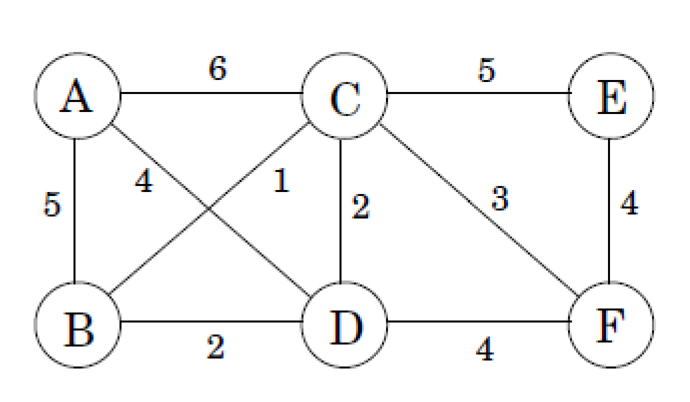


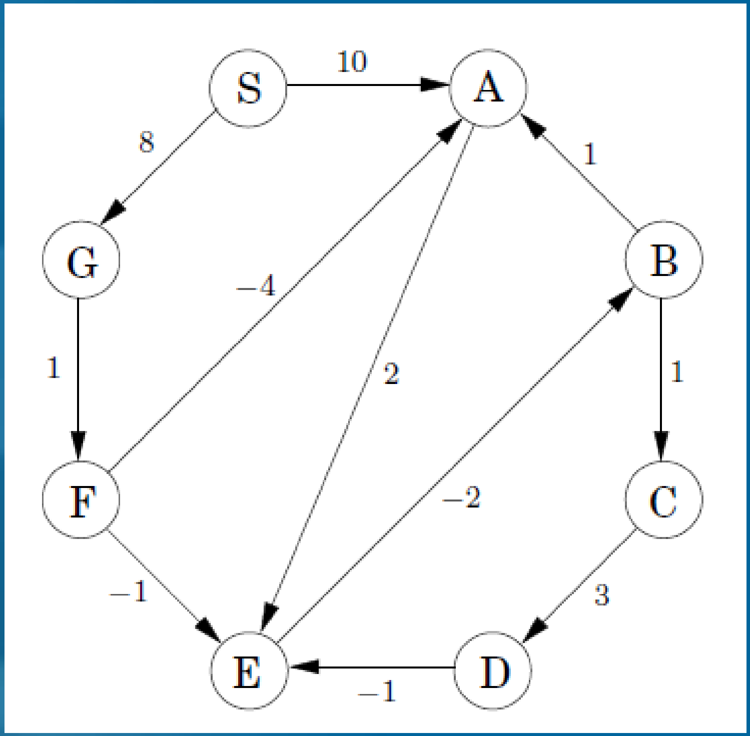
$H[V']=(V',E'=\{(L,H),(L,I),(H,I),(B,A)\})$

(si noti che $H[V']$ non è connesso)

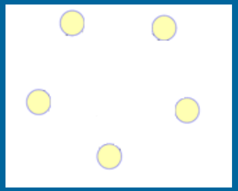
Grafi pesati

- Grafo pesato: è un grafo G=(V,E,w) in cui ad ogni arco viene associato un valore definito dalla funzione peso w (definita su un opportuno insieme, di solito i reali).

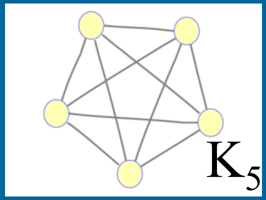




Due grafi molto particolari



- Grafo totalmente disconnesso: è un grafo $G=(V,E)$ tale che $V\neq\phi$ ed $E=\phi$.
- Grafo completo (o clique): è un grafo tale che per ogni coppia di nodi esiste un arco che li congiunge. Il grafo completo con n vertici verrà indicato con $K_n \Rightarrow |E|=C_{n,2}=n\cdot(n-1)/2$



$\Rightarrow$ ne consegue che un grafo senza cappi (archi da un nodo a se stesso) o archi paralleli può avere un numero di archi m compreso tra 0 e $n(n-1)/2=\Theta(n^2)$. In particolare, se il grafo è connesso, allora $m\geq n-1$ (lo dimostriamo nella prossima slide). Quindi, per grafi connessi:

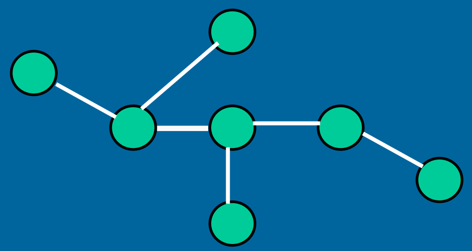
$$n-1\leq m\leq n(n-1)/2, \text{ cioè } m=\Omega(n) \text{ ed } m=O(n^2).$$

Definizioni: Se $m=\Theta(n^2)$, il grafo si dice denso, mentre se $m=\Theta(n)$, il grafo si dice sparso.

Nota bene: se un grafo ha $m\geq n-1$ archi, non è detto che sia connesso.

Domanda: Qual è il numero minimo di archi che deve avere un grafo per essere sicuramente connesso? $|E(K_{n-1})|+1$

Un grafo speciale: l'albero



Def.: Un albero è un grafo connesso ed aciclico

Teorema: Sia T=(V,E) un albero; allora |E|=|V|-1.

Dim: Infatti, per induzione su |V|:

- $|V|=1 \Rightarrow |E|=0=|V|-1$;
- Supposto vero per $|V|=k-1>1$, sia T un albero di k nodi; poiché T è connesso ed aciclico, ha almeno una foglia (cioè un nodo di grado 1; infatti, se tutti i nodi avessero grado almeno 2, allora il grafo conterrebbe cicli (dimostratelo!)); allora, rimuovendo tale nodo e l'arco associato, si ottiene ancora un grafo connesso ed aciclico, (cioè un albero, per definizione) di k-1 nodi, che per ipotesi induttiva ha k-2 archi; ne consegue che T ha k-1 archi.

$\Rightarrow$ l'albero è il grafo connesso con il minimo numero di archi: basta togliere un arco e diventerà disconnesso!

Torniamo al problema dei 7 ponti…

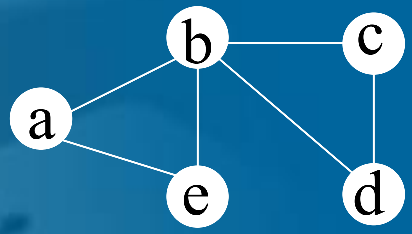
- Definizione: Un grafo G=(V,E) si dice percorribile o Euleriano se e solo se contiene un cammino (non semplice, in generale) che passa una ed una sola volta su ciascun arco in E.
- Teorema di Eulero: Un grafo G=(V,E) connesso è percorribile se e solo se ha tutti i nodi di grado pari, oppure se ha esattamente due nodi di grado dispari.

⇒ Il problema dei 7 ponti non ammette soluzione, in quanto i 4 nodi hanno tutti grado dispari, e quindi il grafo non è percorribile.

- Osservazione: In realtà Eulero dimostrò solo la condizione necessaria del teorema (ovvero il solo se), e quindi poté concludere che il problema dei 7 ponti non ammetteva soluzione, mentre la condizione sufficiente (ovvero il se) venne dimostrata nel 1873 da Hierholzer, il quale fornì un algoritmo costruttivo per trovare un cammino Euleriano nei casi previsti dal teorema.

L'algoritmo di Hierholzer

Idea dell'algoritmo: Un grafo con tutti i nodi di grado pari può essere percorso nel seguente modo: poiché i nodi hanno tutti grado pari, per ogni arco entrante in un vertice ci sarà un corrispondente arco uscente; si parte quindi da un qualsiasi nodo, e si percorrono gli archi, eliminandoli una volta percorsi, e avendo cura di scegliere il prossimo arco da percorrere in modo tale che la sua rimozione non disconnetta il grafo (finché questo è possibile!) perché altrimenti si potrebbe non percorrere tutto il grafo: ad esempio, nel seguente grafo, se partiamo dal vertice a e arriviamo in b, dobbiamo proseguire in c o in d, non in e

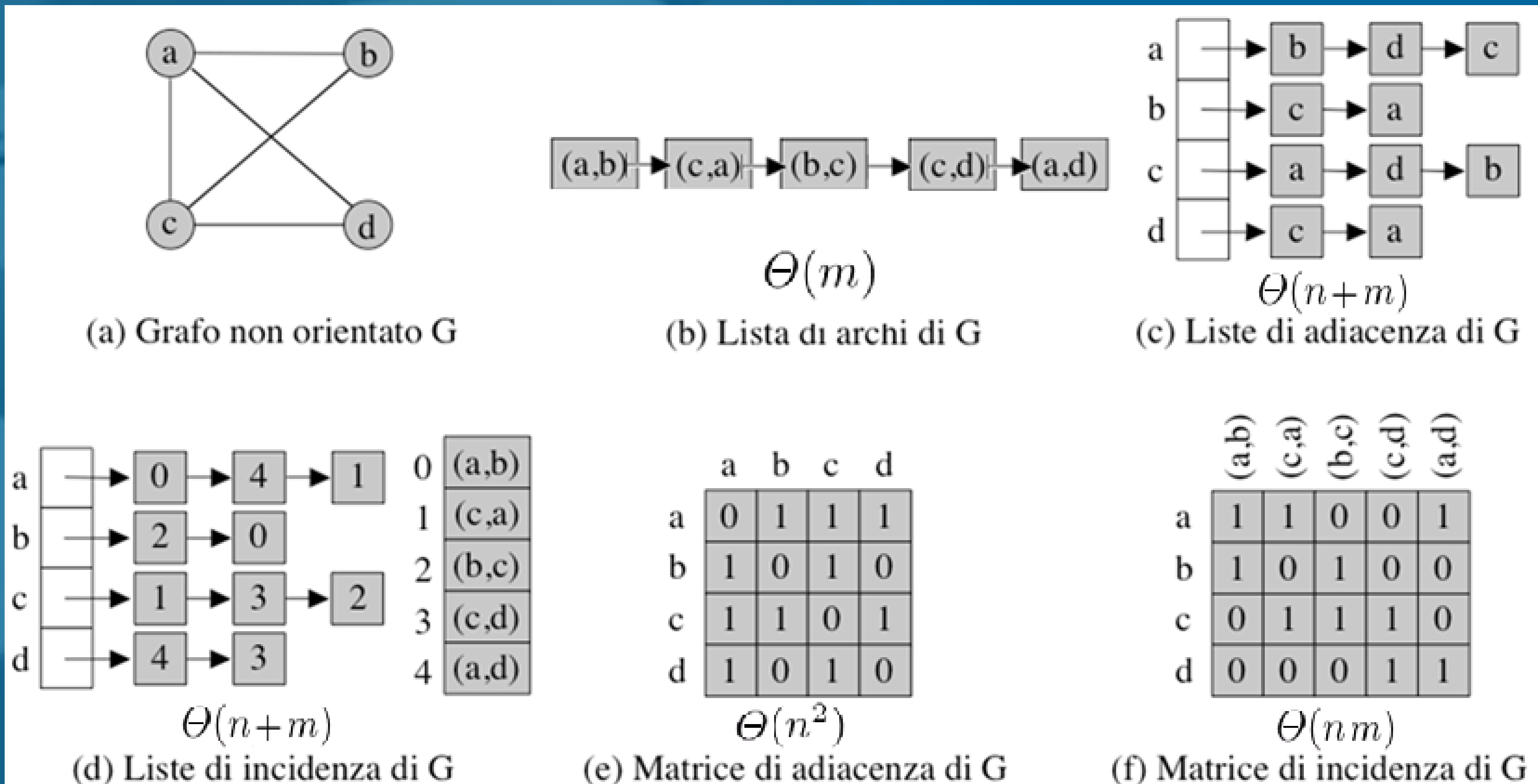


Si noti che il percorso terminerà sul nodo di partenza. Invece, per percorrere un grafo avente due nodi di grado dispari e tutti gli altri di grado pari, è necessario partire da uno qualsiasi dei due nodi di grado dispari, e procedere con le stesse accortezze di cui sopra; si noti che in questo caso il percorso terminerà sull'altro nodo di grado dispari.

Analisi: Si può dimostrare che l'algoritmo ha complessità $\Theta(m)$ (se il grafo è rappresentato usando liste di adiacenza, come vedremo tra un attimo).

Strutture dati per rappresentare grafi

Grafi non diretti



(a) Grafo non orientato G

(b) Lista di archi di G

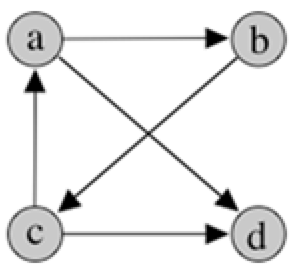
(c) Liste di adiacenza di G

(d) Liste di incidenza di G

(e) Matrice di adiacenza di G

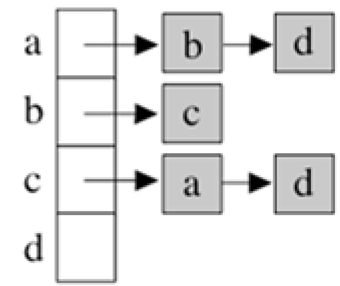
(f) Matrice di incidenza di G

Grafi diretti

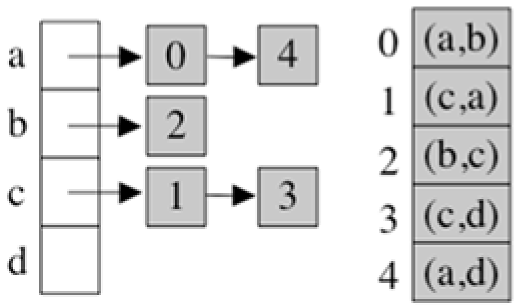


(a) Grafo orientato G

(b) Lista di archi di G



((c) Liste di adiacenza di G



(d) Liste di incidenza di G

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	0	0	0

(e) Matrice di adiacenza di G

	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	0	0	0	1
b	0	0	1	0	0
c	0	1	0	1	0
d	0	0	0	0	0

(f) Matrice di incidenza di G

Prestazioni della lista di archi (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
`grado`(v)	$\Theta(m)$
`archiIncidenti`(v)	$\Theta(m)$
`sonoAdiacenti`(x,y)	$O(m)$
`aggiungiVertice`(v)	non supportata
`aggiungiArco`(x,y)	$O(1)$
`rimuoviVertice`(v)	$\Theta(m)$
`rimuoviArco`(e)	$O(1)$

Suppongo che mi venga dato un riferimento diretto all'arco da cancellare

Prestazioni delle liste di adiacenza (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
`grado`(v)	$\Theta(\delta(v))$
`archiIncidenti`(v)	$\Theta(\delta(v))$
`sonoAdiacenti`(x,y)	$O(\max\{\delta(x),\delta(y)\})$
`aggiungiVertice`(v)	$O(1)$
`aggiungiArco`(x,y)	$O(1)$
`rimuoviVertice`(v)	$O(m)$
`rimuoviArco`$(e=(x,y))$	$O(\delta(x)+\delta(y))$

Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

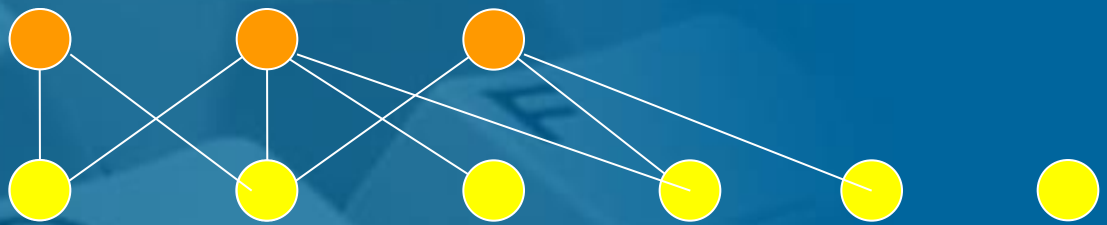
Prestazioni della matrice di adiacenza (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$\Theta(n)$
archiIncidenti(v)	$\Theta(n)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(1)$
aggiungiVertice(v)	$\Theta(n)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$\Theta(n)$
rimuoviArco$(e = (x, y))$	$O(1)$

Suppongo di gestire le matrici dinamicamente

Approfondimento: Grafi bipartiti

- È un grafo G=(V=(A,B),E) tale che ogni arco ha come estremi un nodo in **A** ed un nodo in B



- Un grafo bipartito si dice completo se per ogni $x \in$ **A** ed $y \in B$, $(x,y) \in E$
- Con $K_{a,b}$ si indica il grafo bipartito completo di ordine (a,b), ovvero tale che |**A**|=a e |B|=b
- Domanda 1: $K_{3,3}$ è planare (si può cioè disegnare senza che vi siano intersezioni di archi)? E K_4? E K_5?
- Domanda 2: gli alberi sono grafi bipartiti?