Università degli Studi di Roma
La Sapienza
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Monica Nesi
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
Università di L'Aquila
e
Marisa Venturini Zilli
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Università di Roma 'La Sapienza'

Sistemi di riduzione astratti

Research Report
SI-98/06
March 1998

L'elaborazione di queste note è stata svolta nell'ambito della collaborazione tra l'Università 'La Sapienza' di Roma e l'Università di L'Aquila, grazie al supporto finanziario del progetto MURST 40%
"Tecniche formali per la specifica, l'analisi, la verifica, la sintesi e la trasformazione di sistemi software".

1 Introduzione

Un *sistema di riduzione astratto*, abbreviato nell'acronimo ARS (da Abstract Reduction System), consiste in un insieme di elementi corredato di una o piú relazioni binarie. Tale nozione possiede un livello di generalità tale che sono suoi casi particolari ad esempio:

- produzioni di una grammatica
- riscrittura di termini del prim'ordine
- riscrittura di termini d'ordine superiore
- riscrittura di alberi di termini
- riscrittura di stringhe
- riscrittura di grafi
- riscrittura di processi
- riscrittura di derivazioni formalizzate

Tale livello di generalità non si abbassa sostanzialmente se invece di un numero finito di relazioni se ne considera una sola. Nel seguito ci atterremo a tale semplificazione, per cui considereremo sistemi di riduzione astratti con una sola relazione di riduzione, quale la $\longrightarrow$ che può essere considerata una equazione orientata oppure una trasformazione elementare.
Dopo aver definito un ARS, verranno dedicati paragrafi ai seguenti argomenti che elenchiamo nell'ordine secondo cui vengono introdotti:

1. grafi di riduzione
2. confluenza
3. terminazione
4. induzione noetheriana
5. canonicità
6. benfondatezza

7. crescenza e induttività
8. cofinalità
9. grafi condensati
10. spettri

Per eventuali approfondimenti rimandiamo ai lavori nei Riferimenti bibliografici qui inclusi. Risultano basilari in particolare [1], [6] e [11].

2 ARS

Diamo ora la definizione di sistema di riduzione astratto.

Definizione 1 *(ARS)*
*Un ARS (*Abstract Reduction System*) è una struttura*

$$\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$$

dove A è un insieme numerabile e $\longrightarrow\ \subseteq A \times A$ è una relazione binaria detta riduzione.

La definizione appena data di ARS, al contrario di quella in [9], richiede per ogni ARS la numerabilità dell'insieme A, i cui elementi vengono denotati mediante a, b, ...
Se per $a, b \in A$ si ha $(a, b) \in\ \longrightarrow$, allora si scrive $a \longrightarrow b$. L'elemento b è il risultato dell'applicazione di un passo di riduzione a partire da a.

La chiusura riflessiva e transitiva di $\longrightarrow$ è denotata con $\stackrel{*}{\longrightarrow}$. Quindi, $a \stackrel{*}{\longrightarrow} b$ se esiste una sequenza finita (possibilmente vuota) di *passi di riduzione* $a \longrightarrow a_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_k \longrightarrow b$ per qualche $a_1, \ldots, a_k \in A$. Leggiamo infatti *a si riduce a b* se $a \stackrel{*}{\longrightarrow} b$, e diciamo anche che b è un *ridotto* di a.

La chiusura soltanto transitiva di $\longrightarrow$ è denotata mediante $\stackrel{+}{\longrightarrow}$.

La relazione inversa di $\longrightarrow$ è denotata mediante $\longleftarrow$ oppure $\longrightarrow^{-1}$.

La chiusura riflessiva, transitiva e simmetrica di $\longrightarrow$ è denotata mediante $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}$ (la relazione di equivalenza indotta da $\longrightarrow$, detta anche *convertibilità*). Nel seguito useremo $=$ anche per denotare l'identità sintattica.

Un ARS $\mathcal{A}$ è *coerente* o *consistente* se $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}\ \subseteq A^2$ e $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}\ \neq A^2$, vale a dire non ogni coppia di elementi risulta convertibile.

Inoltre *a è in forma normale* oppure è una *forma normale* se non esiste $b \in A$ tale che $a \longrightarrow b$, mentre *ha forma normale* se esiste $b \in A$ tale che $a \stackrel{*}{\longrightarrow} b$ e b è una forma normale.

Diremo anche che un ARS ha una proprietà P qualora la sua relazione di riduzione ha la proprietà P.

3 Grafi di riduzione

Per ogni $a \in A$, consideriamo il grafo diretto con radice etichettata da a e i cui nodi sono etichettati da elementi $b \in A$ che sono ridotti di a [2, 9, 10, 14, 15, 8].

Definizione 2 *Sia $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS. Per ogni $a \in A$ definiamo:*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(a) & = & \{b \in A \mid a \longrightarrow b\} \\ \Delta^+(a) & = & \{b \in A \mid a \xrightarrow{+} b\} \\ \Delta^*(a) & = & \{b \in A \mid a \xrightarrow{*} b\} \end{array}$$

Definizione 3 *Sia a un elemento arbitrario di un ARS.*
Il grafo di riduzione di a, notazione $G(a)$, è l'ARS $\langle \Delta^*(a), \longrightarrow_a \rangle$, dove $\longrightarrow_a$ è la restrizione di $\longrightarrow$ a $\Delta^*(a)$.

Per tali grafi di riduzione, che chiameremo semplicemente grafi, vedasi [9] ed anche [2, 15] nel caso particolare in cui a è un *lambda*-termine.
Va osservato che un grafo di riduzione può essere una struttura molto complicata. Infatti, dal punto di vista degli ordinamenti, $(\Delta^*(a), \leq)$ risulta essere soltanto un preordine rispetto a $\leq$ tale che $a \leq b$ se e soltanto se $a \xrightarrow{*} b$.
Vari esempi di grafi di riduzione si possono trovare in [9, 10], tra i quali riportiamo qui, in figura 1, quello noto come grafo di Hindley, che riprenderemo più avanti a proposito delle proprietà di confluenza.

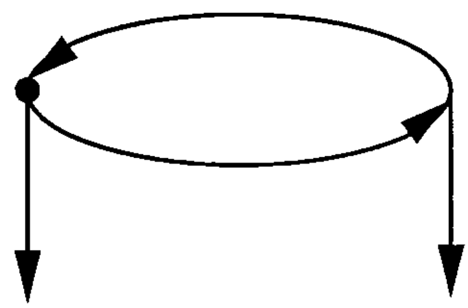


Figura 1: Grafo di Hindley

Per semplificare, in tale grafo è stato evidenziato soltanto il nodo radice mediante • e sono state omesse le etichette ai nodi. In seguito cercheremo di semplificare la rappresentazione dei grafi allo stesso modo, quando ciò non provochi ambiguità.

Un grafo di riduzione $G(a)$ può essere definito come il piú piccolo sotto-ARS che contiene tutti i ridotti di a, secondo la seguente definizione di sotto-ARS.

Definizione 4 *Siano dati due ARS* $\langle A_1, \longrightarrow_1 \rangle$ *e* $\langle A_2, \longrightarrow_2 \rangle$.
$\langle A_1, \longrightarrow_1 \rangle$ *è* sotto-ARS *di* $\langle A_2, \longrightarrow_2 \rangle$, *oppure* $\langle A_2, \longrightarrow_2 \rangle$ *è* estensione *di* $\langle A_1, \longrightarrow_1 \rangle$, *se:*

1. $A_1 \subseteq A_2$
2. $\longrightarrow_1$ *è la restrizione di* $\longrightarrow_2$ *su* A_1 *(ossia per ogni* $a, a' \in A_1$ *si ha che* $a \longrightarrow_2 a'$ *se e soltanto se* $a \longrightarrow_1 a'$*).*
3. A_1 *è chiuso rispetto a* $\longrightarrow_2$ *(ossia per ogni* $a \in A_1$, $a \longrightarrow_2 a'$ *implica* $a' \in A_1$*).*

Si può mostrare che ogni proprietà di un ARS si conserva nei sotto-ARS.

4 Confluenza

La proprietà della confluenza, detta anche Church-Rosser, risulta importante sia per la coerenza della riscrittura, comportando come vedremo l'unicità della forma normale quando quest'ultima esiste, che per le strategie di riscrittura (ad esempio libera dalla necessità di fare backtracking). Essa comporta inoltre che, qualora la convertibilità sia decidibile, verificare se due termini sono convertibili può esser effettuato semplicemente riducendo entrambi i termini ad un ridotto comune.

Definizione 5 *Dato un ARS* $\langle A, \longrightarrow \rangle$, *la relazione di riduzione* $\longrightarrow$ *è* confluente *(oppure* Church-Rosser, *abbreviato in CR) se per ogni* $a, b, c \in A$ *esiste* $d \in A$ *tale che* $c \xleftarrow{*} a \xrightarrow{*} b$ *implica* $c \xrightarrow{*} d \xleftarrow{*} b$.

Definizione 6 *La relazione di riduzione* $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}$ *è* Church-Rosser *se per ogni* $a, b \in A$ *esiste* $c \in A$ *tale che* $a \stackrel{*}{\longleftrightarrow} b$ *implica* $a \xrightarrow{*} c \xleftarrow{*} b$.

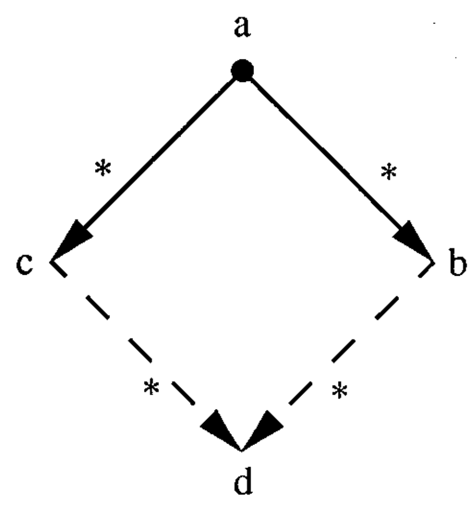


Figura 2: Diagramma di confluenza

Proposizione 1 *Sia* $\langle A, \longrightarrow \rangle$ *un ARS. La relazione* $\longrightarrow$ *è confluente se e solo se* $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}$ *è Church-Rosser.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$, ~~caso 'se'~~) Assumendo la confluenza, la prova della proprietà Church-Rosser è per induzione sul numero n delle riduzioni in $a \overset{n}{\longleftrightarrow} b$ per ogni $a, b \in A$. Se $n = 0$, allora $a = b$ ed il ridotto comune è $d = a = b$. Nel passo induttivo, supponiamo che la proprietà Church-Rosser valga per n. La proviamo per $n+1$. Sia $a \overset{n+1}{\longleftrightarrow} b$. Allora esiste $c \in A$ tale che $a \overset{n}{\longleftrightarrow} c \longleftrightarrow b$. Per ipotesi induttiva esiste $d \in A$ tale che $a \overset{*}{\longrightarrow} d \overset{*}{\longleftarrow} c$. Distinguendo i due casi per $c \longleftrightarrow b$, si ha:

- se $c \longleftarrow b$, segue banalmente che d è il ridotto comune per a e b;
- se $c \longrightarrow b$, per ipotesi di confluenza esiste $d' \in A$ tale che $d \overset{*}{\longrightarrow} d' \overset{*}{\longleftarrow} b$.

($\Longleftarrow$, ~~caso 'solo se'~~) Assumendo la proprietà Church-Rosser, dalla definizione di $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ si ha che, per ogni $a, b, c \in A$, $c \overset{*}{\longleftarrow} a \overset{*}{\longrightarrow} b$ implica $c \overset{*}{\longleftrightarrow} b$. ∎

Nel seguito useremo liberamente 'confluente' o 'Church-Rosser'.

In base alla proprietà di confluenza, possiamo asserire che la riduzione non può ottenere risultati, ossia forme normali, diversi a partire da uno stesso elemento. Sottolinea questo fatto il seguente corollario.

Corollario 1 *Sia $\langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS tale che $\longrightarrow$ è confluente.*
Ogni elemento in A ha al più una forma normale.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che esista un elemento a tale che $a \overset{*}{\longrightarrow} b$ e $a \overset{*}{\longrightarrow} c$ con b e c entrambi in forma normale e tra loro diversi. Per la proprietà Church-Rosser, essi dovrebbero avere un ridotto comune, mentre, per ipotesi, entrambi sono in forma normale. Quindi b e c coincidono. ∎

La proprietà di unicità della forma normale non implica la confluenza.

Esempio 1: Sia dato l'ARS $< \{a, b, c, d\}, \longrightarrow >$, con $\longrightarrow$ definita nel modo seguente:
$a \longrightarrow b$
$a \longrightarrow c$
$c \longrightarrow b$
$c \longrightarrow d$
$d \longrightarrow d$
vale a dire graficamente:

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
b & & c \arrow[ll] \arrow[dr] & \\
& & & d \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
$$

La relazione $\longrightarrow$ ha la proprietà di unicità della forma normale, ma non è confluente.

$\bullet$

Definizione 7 *Dato un ARS* $\langle A, \longrightarrow \rangle$, *la relazione* $\longrightarrow$ *è* debolmente confluente *o* localmente confluente *(abbreviato in WCR, dall'inglese Weakly Church-Rosser) se per ogni* $a, b, c \in A$ *esiste* $d \in A$ *tale che* $c \longleftarrow a \longrightarrow b$ *implica* $c \overset{*}{\longrightarrow} d \overset{*}{\longleftarrow} b$.

Si vede facilmente che la confluenza debole è un caso particolare della confluenza.

Corollario 2 *Sia* $\langle A, \longrightarrow \rangle$ *un ARS. Se la relazione* $\longrightarrow$ *è confluente, allora è debolmente confluente.*

Il viceversa di tale corollario non è vero in generale, ovvero la confluenza debole non implica sempre la confluenza. Un controesempio è il seguente:

Esempio 2: Siano $a, b, c, d \in A$ e

$a \longrightarrow b$
$a \longrightarrow c$
$b \longrightarrow a$
$b \longrightarrow d.$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[l, bend right] \arrow[d] \\
c & d
\end{tikzcd}
$$

Basta considerare le possibili riduzioni a partire dagli elementi a e b e si vede che la relazione è debolmente confluente, ma non confluente. Infatti il grafo di riduzione è il grafo di Hindley che abbiamo già visto (figura 1). $\bullet$

Un altro esempio di ARS debolmente confluente non confluente ed inoltre non ciclico è quello in figura 3 :

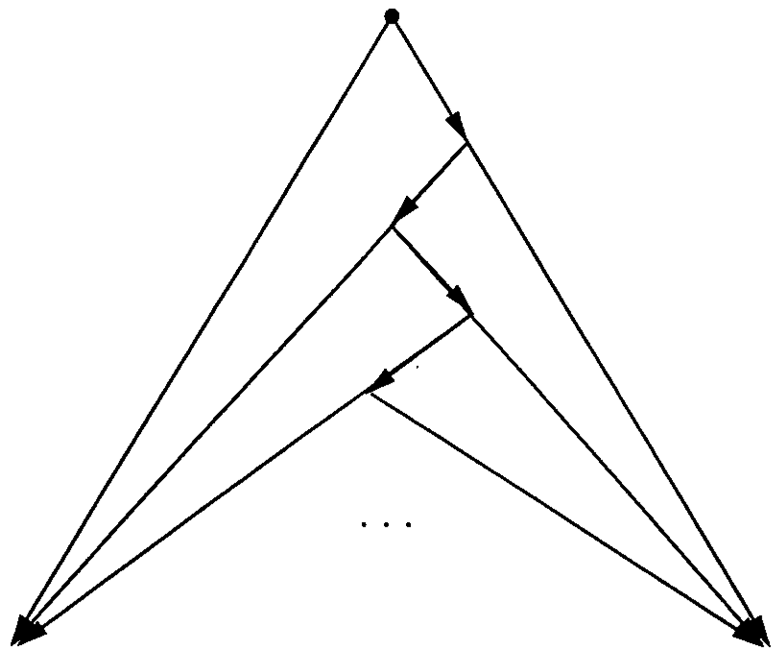


Figura 3: Grafo aciclico WCR

Corollario 3 *Sia* $\langle A, \longrightarrow \rangle$ *un ARS. La relazione* $\longrightarrow$ *è confluente se e solo se* $\stackrel{*}{\longrightarrow}$ *è debolmente confluente.*

Osserviamo che un ARS confluente e che possiede almeno due forme normali distinte è coerente (infatti non tutti gli elementi vengono identificati tra loro).

5 Terminazione

Le forme di terminazione comunemente considerate sono la *normalizzazione debole* e la *normalizzazione forte.*

Definizione 8 *Sia* $\langle A, \longrightarrow \rangle$ *un ARS. La relazione* $\longrightarrow$ *è* debolmente normalizzante *(abbreviato in WN, dall' inglese Weakly Normalizing) se ogni* $a \in A$ *ha una forma normale.*

Definizione 9 *La relazione* $\longrightarrow$ *è* fortemente normalizzante *o* terminante *o* noetheriana *(abbreviato in SN, dall'inglese Strongly Normalizing) se non esiste alcuna derivazione infinita* $a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \ldots$ *di riduzioni, ovvero ogni derivazione termina in una forma normale.*

Esempio 3: Siano $a, b, c \in A$ e
$a \longrightarrow b$
$a \longrightarrow c$
$c \longrightarrow a.$
Tale relazione è debolmente normalizzante (ogni termine ha una forma normale, ovvero l'elemento b), ma non è terminante in quanto esiste la sequenza infinita $a \longrightarrow c \longrightarrow a \longrightarrow c \longrightarrow \ldots$.
Anche la relazione definita nell'Esempio 2 è debolmente normalizzante ma non terminante. •

Ovviamente, una relazione terminante è debolmente normalizzante.

Dimostrare che un ARS è SN risulta in generale difficile in quanto tale proprietà è indecidibile anche in casi semplici, quale ad esempio un sistema di riscrittura avente una sola regola.
Per provare la terminazione sono stati definiti vari metodi.
Un metodo consiste nella definizione di un opportuno ordinamento parziale $>$ sugli elementi di un ARS tale che $a \longrightarrow b$ implichi $a > b$.
Un altro metodo consiste nell'immergere un ARS in un altro che è noto essere terminante.
Esistono in letteratura varie condizioni sufficienti per la terminazione di particolari ARS.

6 Induzione Noetheriana

Per dimostrare proprietà di un ARS, quindi valide per ogni $a \in A$, sussiste il principio d'induzione noetheriana.
Ricordiamo che

$$\Delta^+(a) = \{b \mid a \xrightarrow{+} b\}.$$

Definizione 10 *Sia $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS e P un predicato unario sull'insieme A.*
P è $\longrightarrow$-completo *se*

$$\forall a \in A\, [\forall b \in \Delta^+(a)\; P(b)] \Longrightarrow P(a).$$

Osserviamo che se a è una forma normale allora $P(a)$ risulta vero per ogni P $\longrightarrow$-completo.

Teorema 1 (Principio d'Induzione Noetheriana, abbreviato in PIN)
Sia $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS tale che $\longrightarrow$ è noetheriana. Sia P un predicato unario $\longrightarrow$-completo.
Allora $\forall a \in A$ si ha $P(a)$.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme B di A tale che $B = \{b \in A \mid \neg P(b)\} \neq \emptyset$. Per ogni $b \in B$ si ha che b è in forma normale *aut* (or esclusivo) riducibile ad una forma normale.

- b è in forma normale.
  Tale caso non può verificarsi in quanto si viene a negare che P sia $\longrightarrow$-completo. Infatti ogni predicato $\longrightarrow$-completo è evidentemente vero sulle forme normali.

- b è riducibile.
  In tal caso esiste un $b_0 \in B$ tale che per ogni $b' \in \Delta^+(b_0)$ valga $P(b')$. Ma in tal modo viene a negarsi che P sia $\longrightarrow$-completo. Infatti per non negare la $\longrightarrow$-completezza si sarebbe forzati a costruire una derivazione infinita da b_0 i cui elementi non godono della proprietà P.

Deve quindi essere $B = \emptyset$. ∎

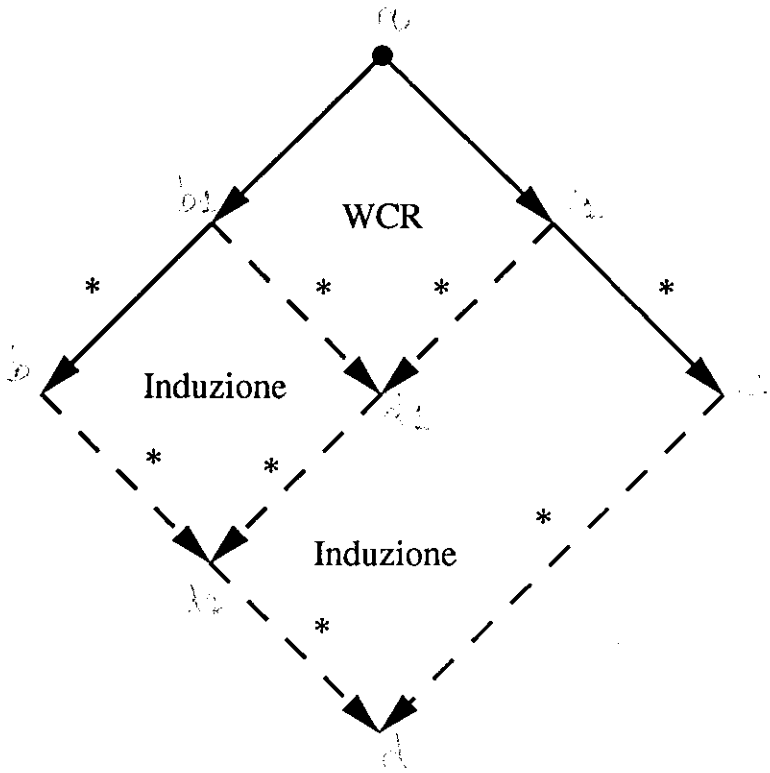
Abbiamo visto che in generale la locale confluenza non implica la confluenza.
L'implicazione invece sussiste se la relazione di riduzione è terminante.
Un'applicazione del PIN si ha nel seguente risultato.

Lemma 1 (Lemma di Newman) *Sia* $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}, \longrightarrow \rangle$ *un ARS tale che* $\longrightarrow$ *è noetheriana.*
La relazione $\longrightarrow$ *è confluente se e solo se è localmente confluente.*

Dimostrazione L'implicazione "confluenza $\Longrightarrow$ locale confluenza" è data dal Corollario 2, senza l'ipotesi di terminazione della relazione di riduzione. Il viceversa, ossia "locale confluenza $\Longrightarrow$ confluenza", è dimostrato per induzione noetheriana. Basta esprimere la proprietà da provare, ossia la confluenza della relazione $\longrightarrow$, come il predicato

$$P(a) = \forall b\, c\, (b \overset{*}{\longleftarrow} a \overset{*}{\longrightarrow} c) \Longrightarrow \exists d.\ b \overset{*}{\longrightarrow} d \overset{*}{\longleftarrow} c$$

e poi provare che $P(a)$ è vero per ogni a (ovvero si dimostra che la relazione $\longrightarrow$ è confluente). Per il principio di induzione noetheriana, per provare $P(a)$ per ogni $a \in A$ è sufficiente provare che P è $\longrightarrow$-completo (in quanto $\longrightarrow$ è noetheriana per ipotesi). Supponiamo $a \overset{m}{\longrightarrow} b$ ed $a \overset{n}{\longrightarrow} c$.
Se $m = 0$ allora scegli $d = c$.
Se $n = 0$ allora scegli $d = b$.
Se $m, n \neq 0$, allora viene fatto almeno un passo di riduzione, ovvero esistono $b_1, c_1 \in A$ tali che $a \longrightarrow b_1 \overset{*}{\longrightarrow} b$ ed $a \longrightarrow c_1 \overset{*}{\longrightarrow} c$. Per ipotesi la relazione $\longrightarrow$ è localmente confluente, quindi esiste $d_1 \in A$ tale che
$b_1 \overset{*}{\longrightarrow} d_1 \overset{*}{\longleftarrow} c_1$. Provare che il predicato P della confluenza è $\longrightarrow$-completo significa dimostrare che $P(a)$ è vero sapendo che $P(e)$ è vero per ogni
$e \in \triangle^+(a)$.
Poiché $b_1, c_1 \in \triangle^+(a)$, $P(b_1)$ è vero (procedendo per induzione dal basso) ossia esiste $d_2 \in A$ tale che $b \overset{*}{\longrightarrow} d_2 \overset{*}{\longleftarrow} d_1$. Anche $P(c_1)$ è vero, per cui esiste $d \in A$ tale che $d_2 \overset{*}{\longrightarrow} d \overset{*}{\longleftarrow} c$. Quindi esiste un elemento d tale che $b \overset{*}{\longrightarrow} d \overset{*}{\longleftarrow} c$ ossia $P(a)$. P è dunque $\longrightarrow$-completo e quindi, per il PIN, $P(a)$ per ogni $a \in A$.



*

Figura 4: Lemma di Newman

■

Una formulazione abbreviata equivalente del Lemma di Newman è

$$SN + WCR \Longrightarrow CR.$$

7 Canonicità

Definizione 11 *Dato un ARS* $\langle A, \longrightarrow \rangle$, *la relazione* $\longrightarrow$ *è* canonica *o* completa *se è confluente e terminante.*

Sappiamo (Corollario 1) che se la relazione $\longrightarrow$ è confluente, la forma normale di un qualsiasi elemento in A, se esiste, è unica.
Vale inoltre il seguente risultato.

Corollario 4 *Sia* $\langle A, \longrightarrow \rangle$ *un ARS.*
Se la relazione $\longrightarrow$ *è canonica, la forma normale di un qualsiasi elemento in* A *esiste ed è unica.*

Osserviamo che la canonicità rende decidibile la relazione di convertibilità: infatti, dati due qualsiasi elementi risulta sufficiente ridurli alle loro forme normali (che sappiamo esistere ed essere uniche) e poi verificare la loro uguaglianza o meno.

8 Benfondatezza

Definizione 12 *Sia $\langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS. Se $B \subseteq A$, un elemento $b \in B$ è* minimale *(in B rispetto a $\longrightarrow$) se $a \longrightarrow b$ implica $a \notin B$.*

Definizione 13 *Un ARS $\langle A, \longrightarrow \rangle$ è detto* benfondato *(notazione WF, dall'inglese Well-Founded), se ogni sottoinsieme non vuoto di A ha un elemento minimale rispetto alla relazione $\longrightarrow$.*

Dunque una relazione risulta benfondata se e soltanto se la sua relazione inversa risulta terminante, per cui possiamo indicare la benfondatezza anche mediante SN^{-1}.
Se come ARS consideriamo $G(a)$, possiamo asserire che ogni $G(a)$ benfondato non ha cicli.

9 Crescenza e Induttività

Definizione 14 *Dato un ARS $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$, la relazione $\longrightarrow$ è* crescente *(abbreviato in Incr, dall'inglese Increasing) se esiste una funzione $|\ | : A \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $a, b \in A$ si ha che $a \longrightarrow b$ implica $|a| < |b|$, dove $<$ è l'ordinamento usuale sui numeri naturali $\mathbb{N}$.*

Mostriamo che Incr $\Longrightarrow$ WF.

Proposizione 2 *Sia $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS.*
Se la relazione $\longrightarrow$ è crescente, allora $\longrightarrow$ è benfondata.

Dimostrazione Il risultato segue dalla benfondatezza dell'ordinamento $<$ su $\mathbb{N}$. ∎

Osserviamo che la crescenza implica l'aciclicità del grafo di riduzione di un qualsiasi elemento dell'ARS. Quindi l'asserto della precedente proposizione risulta intuitivo, in quanto la sua negazione comporterebbe la presenza di cicli in qualche grafo di riduzione di un ARS crescente.

Definizione 15 *Dato un ARS $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$, la relazione $\longrightarrow$* è a ramificazione finita *(abbreviato in FB, dall'inglese Finitely Branching) se per ogni $a \in A$ l'insieme $\Delta(a)$ dei ridotti in un passo di a è finito.*

Definizione 16 *Sia $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS. Per ogni $a \in A$ definiamo:*

$$\begin{aligned} \nabla(a) &= \{b \in A \mid b \longrightarrow a\} \\ \nabla^{+}(a) &= \{b \in A \mid b \stackrel{+}{\longrightarrow} a\} \\ \nabla^{*}(a) &= \{b \in A \mid b \stackrel{*}{\longrightarrow} a\} \end{aligned}$$

Mostriamo che $WF + FB^{-1} \Longrightarrow Inc$.

Proposizione 3 *Sia $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS.*
Se la relazione $\longrightarrow$ è benfondata e la sua inversa $\longleftarrow$ è a ramificazione finita, allora $\longrightarrow$ è crescente.

Dimostrazione Per $WF + FB^{-1}$ si ha che $\nabla^{*}(a)$ è finito per ogni $a \in A$. Per dimostrare che $\longrightarrow$ è crescente, è sufficiente considerare una funzione $|\ | : A \to \mathbb{N}$ definita nel modo seguente: $|a| = card(\nabla^{*}(a))$ per ogni $a \in A$, dove *card* denota la cardinalità di un insieme. Tale funzione ha la proprietà che per ogni $a, b \in A$, $a \longrightarrow b$ implica $|a| < |b|$. Infatti, si ha che $b \in \nabla^{*}(b)$ ma $b \notin \nabla^{*}(a)$, altrimenti si formerebbe un ciclo e verrebbe quindi contraddetta l'ipotesi che $\longrightarrow$ sia benfondata. Quindi, $\longrightarrow$ è crescente. ∎

Definizione 17 *Dato un ARS $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$, la relazione $\longrightarrow$* è induttiva *(abbreviato in Ind) se per ogni derivazione (possibilmente infinita)*

$$a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots$$

esiste un elemento $a \in A$ tale che $a_n \stackrel{*}{\longrightarrow} a$ per ogni n.

Mostriamo che $Ind + Incr \Longrightarrow SN$.

Proposizione 4 *(Lemma di Nederpelt) Sia $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ un ARS.*
Se la relazione $\longrightarrow$ è induttiva e crescente, allora $\longrightarrow$ è terminante.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che la relazione $\longrightarrow$ non sia terminante, ovvero che esista una derivazione infinita

$$D : a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots$$

di elementi in A. Per ipotesi di induttività, esiste un elemento $a \in A$ tale che $a_n \xrightarrow{*} a$ per ogni n. Per ipotesi di crescenza esiste una funzione $|\ | : A \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $|a_0| < |a_1| < \ldots$ e, per la transitività dell'ordinamento $<$ su $\mathbb{N}$, si ha che $|a_n| < |a|$ per ogni n. Quindi $|a|$ limita superiormente ogni $|a_n|$, contraddicendo l'ipotesi che la derivazione D sia infinita. ∎

Mostriamo che $WN + UN \Longrightarrow Ind$, dove UN sta per 'unicità della forma normale'.

Proposizione 5 *Sia* $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow \rangle$ *un* ARS.
Se la relazione $\longrightarrow$ *è debolmente normalizzante e le forme normali sono uniche, allora* $\longrightarrow$ *è induttiva.*

Dimostrazione Una derivazione finita risulta banalmente limitata dalla sua forma normale.
Sia $D : a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \ldots$ una derivazione infinita di elementi in A. Per ipotesi di normalizzazione debole, ogni a_n $(n \geq 0)$ ha una forma normale a'_n, ovvero $a_n \xrightarrow{*} a'_n$ e a'_n è in forma normale. Tali forme normali sono convertibili, ovvero $a'_i \xleftrightarrow{*} a'_j$ per ogni $i, j \geq 0$. Quindi per ipotesi di unicità delle forme normali, segue che $a'_i = a'_j$ per ogni $i, j \geq 0$. Scegliendo $a = a'_0$ si ha che $a_n \xrightarrow{*} a$ per ogni n e quindi la relazione $\longrightarrow$ è induttiva. ∎

Ind e CR sono logicamente indipendenti. Infatti è molto facile costruire esempi di ARS che sono CR ma non induttivi, come il lettore può verificare. Per l'implicazione inversa basta considerare un grafo composto di due derivazioni finite aventi in comune soltanto la radice. Infatti ogni ARS terminante risulta induttivo.
L'indipendenza della Ind da CR si riduce dunque a quella di SN da CR.

10 Cofinalità

Riconsideriamo una *riduzione* D, finita o infinita,

$$a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \dots$$

Definiamo un preordine sulle riduzioni.

Definizione 18 *Siano D, D' riduzioni.*

- *$D \preceq D'$ se ogni nodo in D si riduce a qualche nodo in D'.*
- *$D \simeq D'$ se $D \preceq D'$ e $D' \preceq D$.*
- *Sia $\tilde{D} = \{D' : D' \simeq D\}$.*
  Poniamo $\tilde{D}_1 \preceq \tilde{D}_2$ se e soltanto se $D_1 \preceq D_2$.

Che la relazione $\preceq$ tra classi di equivalenza è una relazione d'equivalenza ben definita si può facilmente verificare.

Una riduzione D appartiene a un grafo $G(a)$, per qualche a, se il primo nodo di D è proprio a. Possiamo ora introdurre la nozione di riduzione cofinale.

Definizione 19 *(Riduzione cofinale)*
Una riduzione D' appartenente a $G(a)$ è cofinale *in $G(a)$ se $D \preceq D'$ per ogni D in $G(a)$.*

Qualora valga la proprietà Church-Rosser, se a ha una forma normale allora ogni riduzione a tale forma normale è cofinale.

Si dimostra che cofinalità e confluenza sono equivalenti, come risulta dalla seguente proposizione.

Proposizione 6 *Per ogni ARS numerabile vale l'equivalenza tra la proprietà di cofinalità e la proprietà di confluenza.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$, ossia Cofinalità implica confluenza).
Infatti, per ogni grafo $G(a)$, sia
$D : a = a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \dots$
una riduzione cofinale in $G(a)$. Comunque si considerino due nodi b e c in $G(a)$, da essi partono due riduzioni che portano a due nodi di D, siano a_n e a_m rispettivamente.
Se $n = m$ la confluenza si verifica in a_n coincidente con a_m.
Se $n \neq m$ la confluenza si realizza nel nodo di D che risulta etichettato da a_k con $k = max\{n, m\}$.

($\Longleftarrow$, ossia confluenza implica cofinalità).
Se $G(a)$ è finito, il risultato risulta immediato dato che tutte le riduzioni confluiscono al piú nell'unica forma normale di $G(a)$.
Se $G(a)$ è infinito, consideriamo $\triangle^*(a)$ e supponiamo di enumerarlo a partire da a, per cui possiamo rappresentarlo come successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e definiamo la successione $\{b_n\} \subseteq \triangle^*(a)$ per induzione su $n \in \mathbb{N}$ come segue:

$$\begin{cases} b_0 = a = a_0 \\ b_{n+1} = \quad \text{al primo ridotto comune tra } b_n \text{ e } a_{n+1} \end{cases}$$

Poiché $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costituita da tutti gli elementi di $\triangle^*(a)$, risulta che la riduzione $\{b_n\}$ è cofinale per sua costruzione. ∎

11 Grafi condensati

Definiamo ora, da [15], una relazione d'equivalenza, denominata *equivalenza ciclica* che utilizziamo per 'condensare' un grafo di riduzione.

Definizione 20 *Siano* $b, c \in G(a)$.

1. b *e* c *sono* ciclicamente equivalenti, *notazione* $b \sim c$, *se* $b \xrightarrow{*} c$ *e* $c \xrightarrow{*} b$.

2. *Il* piano *di* b, *notazione* $b/\sim$, *viene definito quale classe d'equivalenza alla quale* b *appartiene. Tale classe risulta appunto essere l'insieme di tutti gli elementi* $c \in G(a)$ *che sono ciclicamente equivalenti a* b.

Passiamo ora a dare la definizione di grafo condensato.

Definizione 21 *Il* grafo condensato *di* $a \in A$, *notazione* $G^0(a)$, *è il grafo diretto con radice tale che:*

- *i nodi sono piani;*

- *le etichette sono costituite dall'insieme di tutti gli elementi del piano. Alternativamente, un elemento rappresentante del piano etichetta il nodo;*

- *gli archi sono definiti come segue:*
  $b/\sim \xrightarrow{*} c/\sim$ *se esiste* $d \in b/\sim$ *ed* $e \in c/\sim$ *tali che* $d \xrightarrow{*} e$ *e non si ha* $b \sim c$.

Tralasciamo, lasciandola al lettore, la verifica che la relazione di riduzione tra tali classi d' equivalenza è ben definita.

La figura 5 mostra il grafo condensato di Hindley.

Chiaramente un grafo condensato rende più essenziale, dal punto di vista dell'ordinamento, l'informazione contenuta in $G(a)$, in quanto si ottiene un ordine parziale rispetto a $\leq$, come è facile verificare.

Per caratterizzazioni dei grafi lineari vedasi [15], in particolare per il $\lambda\beta$-calcolo.

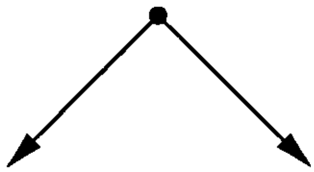


Figura 5: Grafo condensato di Hindley

12 Spettri

La nozione di spettro risulta essenziale per formulare ordinamenti tra riduzioni.

Sia $Red(a)$ l'insieme di tutte le riduzioni che iniziano da un generico $a \in A$.

Definizione 22 *Lo* spettro *di a, notazione* $Spec(a)$, *è* $\langle \tilde{Red}(a), \preceq \rangle$, *dove* $\tilde{Red}(a) = \{\tilde{D} : D \in Red(a)\}$ *e* $\preceq\rangle$ *è l'ordinamento tra classi di equivalenza definito nel paragrafo sulla cofinalità.*

Passiamo a dimostrare che uno spettro risulta essere un cpo (ordinamento parziale completo) ossia un ordinamento parziale dove tutte le $\sqsubseteq$-catene hanno un *sup* dentro l'insieme parzialmente ordinato.

Teorema 2 *Sia a un arbitrario elemento di un ARS.*
$Spec(a)$ *è un cpo.*

Dimostrazione Vedasi [15] per la prova completa. Di seguito ne diamo soltanto la linea.
Segue dalla definizione che $\langle \tilde{Red}(a), \preceq \rangle$ è un ordinamento parziale. Per mettere $Spec(a)$ in relazione con $G^0(a)$, come in [15], definiamo l' ω − *completamento* di $G^0(a)$, notazione $\overline{G^0(a)}$, usando la costruzione e la notazione in [3]. Allo scopo utilizziamo le seguenti notazioni:

- l'insieme $Ch(a)$ di ω − *catene* nell'ordinamento parziale $\langle G^0(a), \longrightarrow \rangle$, con elementi tipici C, C';
- l'ordinamento $\sqsubseteq$ definito come:
  - $C \sqsubseteq C'$ se ogni nodo in C 'si riduce' a qualche nodo in C';

- $C \equiv C'$ se $C \sqsubseteq C'$ e $C' \sqsubseteq C$. Sia $C/\equiv \, = \{C' : C' \equiv C\}$.
- $\overline{G^0(a)} = \{C/\equiv \, : C \in Ch(a)\}$.

Usiamo ancora $\sqsubseteq$ per l'ordinamento parziale indotto su $\overline{G^0(a)}$ dall'ordinamento parziale su $Ch(a)$.
Dimostriamo il teorema mostrando che

1. $\overline{G^0(a)}$ è un cpo;

2. $Spec(a)$ è isomorfo, quale struttura parzialmente ordinata, a $\overline{G^0(a)}$.

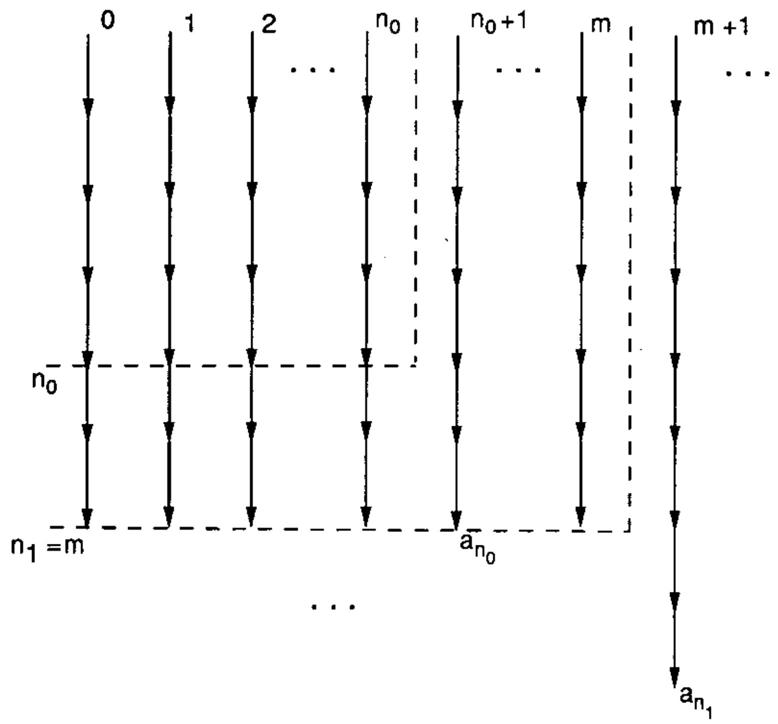


Figura 6: i primi due elementi 'dominanti'

■

Nella dimostrazione appena data viene utilizzato il lemma che passiamo a riportare (da [4, p. 54] ad esempio).

Ricordiamo che ([4, p. 42]) un sottoinsieme P di un cpo Q è detto essere *join-denso* quando per ogni $a \in P$ esiste un sottoinsieme S di P tale che $a = supS$.

Lemma 2 *Un ordinamento parziale avente un sottoinsieme join-denso numerabile è un cpo se e soltanto se ogni catena numerabile ha un sup.*

L'applicabilità agli spettri del precedente lemma è dovuta al fatto che le classi di equivalenza di riduzioni finite danno luogo proprio a sottoinsiemi che sono join-densi.

Corollario 5 *Per ogni $a \in A$ si ha che $G(a)$ e $G^0(a)$ hanno spettri isomorfi.*

Osserviamo che in $Spec(a)$ la riduzione vuota è l'elemento bottom.
Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del massimo è asserita dal seguente risultato (analogo a 5.14 in [9]).

Proposizione 7 *$Spec(a)$ ha un elemento massimo se e soltanto se il grafo condensato $G^0(a)$ è Church-Rosser.*

Dimostrazione La dimostrazione segue dal fatto che il massimo è composto di riduzioni cofinali, se queste esistono nel grafo, e dalla equivalenza per ARS numerabili (provata nel paragrafo sulla cofinalità) tra la proprietà Church-Rosser e quella di cofinalità. ∎

Da ([13]) richiamiamo che un *ordinamento lineare* è un ordinamento rispetto al quale tutti gli elementi sono confrontabili. Un ordinamento lineare è detto un *buon-ordinamento* se non ammette catene infinite discendenti. Osserviamo dapprima che spettri linearmente ordinati possono essere caratterizzati come segue.

Definizione 23 $G^0(a)$ contiene il grafo condensato di Hindley *se ha un sottografo G omeomorfo ad uno dei grafi nelle figure 7 e 8; ed inoltre i due nodi in G, corrispondenti alle foglie nella stessa figura, sono tali che nessuno dei due si riduce all'altro.*

Diamo la seguente nozione, ben nota in teoria generale dei grafi (vedasi ad esempio [16]).

Definizione 24 *I grafi G e G' sono detti* omeomorfi *se e soltanto se esiste un grafo G'' tali che entrambi G e G' possono essere ottenuti da G'' inserendo nuovi nodi di grado due dentro gli archi di G''.*

Proposizione 8 *$Spec(a)$ è linearmente ordinato se e soltanto se $G^0(a)$ non contiene il grafo condensato di Hindley.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Supponiamo per assurdo che $G^0(a)$ contenga il grafo condensato di Hindley.
Consideriamo le derivazioni D e D', entrambe partenti dalla radice di $G^0(a)$, le quali corrispondono, via l'omeomorfismo, ai due archi che partono dalla radice e arrivano alle foglie nel grafo condensato di Hindley.
Consideriamo ora $Spec(a)$, in cui le corrispondenti classi di equivalenza non risultano confrontabili rispetto all'ordinamento $\preceq$.
($\Longleftarrow$) Se $Spec(a)$ non è linearmente ordinato, allora esistono due riduzioni infinite D e D' che non risultano confrontabili. Deve dunque esistere un ultimo nodo a_H comune a D e D'. Il segmento finale di D e D' che parte da a_H dà luogo ad un sottografo di $G^0(a)$ che risulta omeomorfo al grafo condensato di Hindley, come è facile vedere.

∎

12.1 Spettri non benfondati

Per spettri lineari e non benfondati, i seguenti grafi sono due esempi basilari.

1. Ramificazione finita - Sia G_1 il grafo in Figura 7, dove o denota un nodo limite.

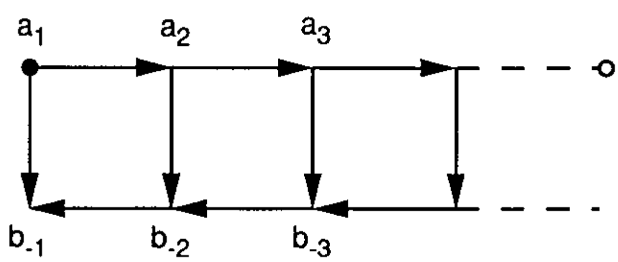


Figura 7: ramificazione finita

2. Ramificazione infinita - Sia G_2 il grafo in Figura 8.

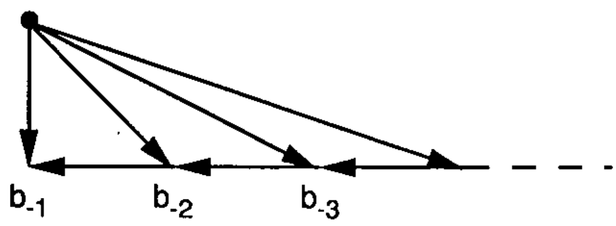


Figura 8: ramificazione infinita

Usando $\oplus$ per la somma lineare e ω^* per ω nell'ordinamento inverso, nel lemma che segue usiamo $Spec(G)$, con abuso di notazione.

Lemma 3 *$Spec(G_1)$e $Spec(G_2)$ sono linearmente ordinati da $\preceq$ e i loro tipi d'ordine sono $\omega \oplus 1 \oplus \omega^*$ e $1 \oplus \omega^*$ rispettivamente.*

Dimostrazione

1. Sia a_1 la radice di G_1 e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ gli elementi della catena discendente di $\longrightarrow$; siano inoltre $b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-n} \ldots$ gli elementi della catena discendente di $\longleftarrow$.
Descrivendo gli elementi di $Spec(G_1)$ mediante parole sull'alfabeto $\{\mathbf{r}, \mathbf{d}\}$, dove 'r' sta per 'right' and 'd' sta per 'down', si ha:

   - il linguaggio $\mathbf{r}^*$ rappresenta tutte le riduzioni finite che partono dalla radice a_1 e terminano in a_n;
   - $\mathbf{r}^\omega$ rappresenta la riduzione infinita $a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \ldots$
   - il linguaggio $\mathbf{r}^*\mathbf{d}$ rappresenta tutte le riduzioni finite che partono dalla radice a_1 e terminano in qualche b_{-n} via a_n.

   Tali riduzioni (che includono la riduzione vuota) sono tutti gli elementi di $Spec(G_1)$. Il tipo d'ordine asserito segue dal fatto che per ogni n, m, con $m > n \geq 0$ si ha:

   - $\mathbf{r}^n \prec \mathbf{r}^m \prec \mathbf{r}^\omega$
   - $\mathbf{r}^n\mathbf{d} \succ \mathbf{r}^m\mathbf{d}$

Inoltre, per arbitrari h e k, $\mathbf{r^h d} \succ \mathbf{r^k}$, dove k può essere anche ω.

2. Sia a la radice di G_2 e siano $b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-n}$ gli elementi della catena discendente di $\longleftarrow$. Sia $\tilde{D}_{-n}$ la classe di $D_{-n} : a \longrightarrow b_{-n}$. Le classi di equivalenza di queste riduzioni (inclusa la riduzione vuota) sono tutti gli elementi di $Spec(G_2)$. Ne segue l'asserito tipo d'ordine poiché per ogni n, m, con $m > n > 0$, si ha $D_{-n} \succ D_{-m}$.

∎

Teorema 3 *Siano dati un ARS $\mathcal{A}$, $a \in A$ con $Spec(a)$ lineare. Allora $Spec(a)$ è benfondato se e soltanto se $G^0(a)$ non contiene sottografi omeomorfi a G_1 o a G_2.*

Dimostrazione Dimostriamo soltanto il verso non banale dell'implicazione. Supponiamo che $Spec(a)$ sia lineare e non benfondato. Proviamo che esiste una catena infinita discendente
$C : b_{-1} \longleftarrow b_{-2} \longleftarrow \ldots$
di elementi di $G(a)$.
Sia $D_{-1} \succ D_{-2} \succ \ldots$
una catena discendente di riduzioni. Scegliamo $b_{-1} \in D_{-1}$ tale che b_{-1} non si riduca ad alcun elemento di D_{-2};
scegliamo $b_{-2} \in D_{-2}$ tale che b_{-2} non si riduca ad alcun elemento di D_{-3};
e cosí via.
Siano $D_{b_{-1}}$, $D_{b_{-2}}$ riduzioni da a a b_{-1}, b_{-2} rispettivamente. Essendo $Spec(a)$ lineare, ne segue che $D_{b_{-2}} \prec D_{b_{-1}}$. L'altra direzione risulta impossibile a causa della scelta di b_{-1}. Ne segue che b_{-2} si riduce a b_{-1}.
Piú generalmente, si ottiene che $b_{-(n+1)}$si riduce a b_{-n}, e abbiamo dimostrato l'esistenza della catena infinita discendente di elementi di $G(a)$.
Ora due casi soltanto sono possibili.

1. Esiste un numero infinito di riduzioni disgiunte che partono da qualche nodo a' e terminano in elementi di C.
   In tal caso si ottiene immediatamente un sottografo omeomorfo a G_2.

2. Il caso precedente non si verifica.
   Allora, partendo dalla radice a, esiste un ridotto a_2 di a dal quale possono essere raggiunti infiniti elementi di C. Ma questo non può

essere ottenuto mediante riduzioni disgiunte. Quindi deve esistere un ridotto a_3 di a_2 dal quale possono essere raggiunti infiniti elementi di C. In tal modo si ottiene una catena

$$C' : a \longrightarrow a_2 \longrightarrow \dots$$

con ogni nodo di C' tale che a partire da esso possono essere raggiunti infiniti elementi di C. Allora un sottografo omeomorfo a G_1 si ottiene facilmente come segue:
scegliamo dapprima una riduzione

$$D_1 : a \xrightarrow{*} b_{-1}$$

e poi, iterativamente, una riduzione

$$D_i : a_i \xrightarrow{*} b_{-j_i}$$

dove b_{-j_i} è tale che $j_i > j_{i-1}$.
Infine trasformiamo gli archi di G_1 in corrispondenti riduzioni aggiungendo nodi di grado due.

■

Per esemplificare quest'ultimo teorema usiamo un lambda-termine il cui spettro risulta linearmente ordinato e non benfondato.
Il lettore riconoscerà G_1 dentro il grafo di riduzione, nella figura 9, di

$$Spec(HH(\lambda z.\mathbf{I}))$$

con $H \equiv \lambda xy.y(y\mathbf{I}xxy)$.

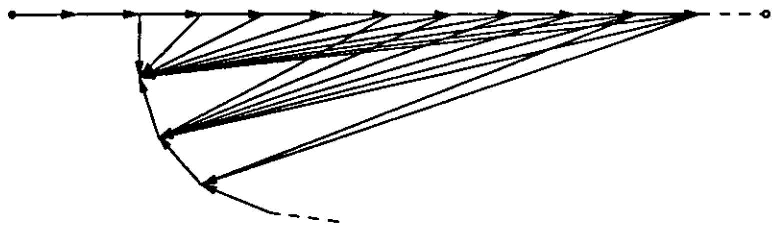


Figura 9: $Spec(HH(\lambda z.\mathbf{I}))$

References

[1] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] H. P. Barendregt, *The Lambda Calculus. Its Syntax and Semantics*, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[3] S. Bloom, Varieties of ordered algebras, *JCSS* **13** (1976), 200–212.

[4] B. A. Davey and A. Priestley, *Introduction to Lattices and Orders*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[5] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.

[6] G. Huet, Confluent Reductions: Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems, *JACM* **27** (1980), 797–821.

[7] B. Intrigila, I. Salvo and S. Sorgi, A characterization of weakly Church-Rosser ARS not Church-Rosser, submitted to *Information and Computation*, 1998.

[8] B. Intrigila and M. Venturini Zilli, Orders, Reduction Graphs and Spectra, *Theoretical Computer Science*, **212** (1999), 211–231.

[9] J. W. Klop, *Combinatory Reduction Systems*, Mathematical Centre Tracts **127**, Mathematical Centre, Amsterdam, 1980.

[10] J. W. Klop, Reduction cycles in Combinatory Logic, in: J. P. Seldin and J. R. Hindley (eds.) *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press, 1980, 193–214.

[11] J. W. Klop, Term Rewriting Systems, in: S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum (eds.), *Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 2: Background: Computational Structures*, Oxford University Press, 1993, 1–116.

[12] J. J. Lévy, Réductions complètes et optimales dans le lambda-calculus, Ph.D. Thesis, Paris, 1978.

[13] Monk J. D., *Introduction to Set Theory*, McGraw-Hill, 1969.

[14] M. Venturini Zilli, Cofinality in Reduction Graphs, in: *Trees in Algebra and Programming*, LNCS 159, Springer-Verlag, 1983, 405–416.

[15] M. Venturini Zilli, Reduction Graphs in the Lambda-Calculus, *Theoretical Computer Science* **29** (1984), 251–275.

[16] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman Scientific and Technical, 1989.