Corso di Laurea in Informatica
Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2008-09)

Alcuni esercizi svolti

Monica Nesi

(I) *Problemi di terminazione in cui l'ordinamento di riduzione* $\succ$ *sui termini è dato.*

Consideriamo due casi a seconda che sia dato un sistema di riscrittura (srt) R oppure una teoria equazionale E.

(I.1) *Verificare che un dato srt* R *è terminante rispetto all'ordinamento* $\succ$*.*
Sia dato il seguente srt R sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(a,x) & \rightarrow & a \\ f(h(x),y) & \rightarrow & g(y, f(x,y)) \\ g(h(a),x) & \rightarrow & h(x) \end{array}$$

Verificare che R è terminante rispetto ad un rpo $\succ_{rpo}$ basato sulle precedenze $f > g > h$.

Per il Teorema di Lankford, per derivare che R è terminante rispetto ad un ordinamento di riduzione $\succ$, è sufficiente verificare che per ogni regola $l \rightarrow r$ in R si abbia $l \succ r$. In questo esempio l'ordinamento dato è un rpo e ricordiamo che ogni rpo è un ordinamento di semplificazione, quindi vale la proprietà del sottotermine.

La prima regola $f(a,x) \rightarrow a$ soddisfa la condizione $f(a,x) \succ_{rpo} a$ per la proprietà del sottotermine (infatti, il lato destro della regola è sottotermine del lato sinistro). Nota che per giustificare l'orientamento di questa regola non è necessario introdurre alcuna precedenza tra f ed a, mentre è sufficiente che l'ordinamento di riduzione dato sia un ordinamento di semplificazione.

Per quanto riguarda la seconda regola, occorre verificare se $f(h(x),y) \succ_{rpo} g(y, f(x,y))$. Poiché nell'ordinamento dato su Σ si ha $f > g$, per la definizione di rpo tale disuguaglianza è vera sse $\{f(h(x),y)\} \succ\!\succ_{rpo} \{y, f(x,y)\}$. Per definizione di ordinamento sui multinsiemi ciò è vero sse sono vere le disuguaglianze del seguente sistema:

$$
\begin{array}{l}
f(h(x),y) \succ_{rpo} y \\
f(h(x),y) \succ_{rpo} f(x,y)
\end{array}
$$

La prima è verificata per la proprietà del sottotermine o per la clausola (iv) dell'rpo generalizzato. La seconda è vera sse (per def. rpo con $f = f$) $\{h(x), y\} \ggcurly_{rpo} \{x, y\}$ sse (def. di ordinamento sui multinsiemi) $h(x) \succ_{rpo} x$, che è verificata per la proprietà del sottotermine o per la clausola (iv) dell'rpo generalizzato. Quindi abbiamo mostrato che $f(h(x), y) \succ_{rpo} g(y, f(x, y))$.

Per la terza regola di R occorre provare $g(h(a), x) \succ_{rpo} h(x)$. Poiché nell'ordinamento parziale dato su Σ si ha $g > h$, per la definizione di rpo tale disuguaglianza è vera sse $\{g(h(a), x)\} \ggcurly_{rpo} \{x\}$, ovvero $g(h(a), x) \succ_{rpo} x$, che è vera per la proprietà del sottotermine o per la clausola (iv) dell'rpo generalizzato.

Abbiamo quindi verificato che per ogni regola di R il lato sinistro è maggiore del lato destro nell'ordinamento di riduzione dato. Quindi per il Teorema di Lankford R è terminante rispetto a tale ordinamento.

(I.2) *Orientare le identità di una data teoria equazionale E in modo che l'srt risultante sia terminante rispetto all'ordinamento $\succ$.*

Consideriamo l'esercizio T3 in [1].
Data una segnatura $\Sigma = \{a, f, g, k\}$, orientare le equazioni

$$
\begin{array}{rcl}
g(x, f(g(a, f(y, z)), y)) & = & g(x, f(y, z)) \\
g(f(x, y), z) & = & f(x, g(y, z)) \\
g(k(x), f(y, x)) & = & k(f(x, y))
\end{array}
$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $k > g > f$. Giustificare la risposta.

Proviamo a verificare se $g(x, f(g(a, f(y, z)), y)) \succ_{rpo} g(x, f(y, z))$. Poiché i simboli di operazione alla radice dei due termini sono uguali ($g = g$), per definizione di rpo la disuguaglianza è vera sse $\{x, f(g(a, f(y, z)), y)\} \ggcurly_{rpo} \{x, f(y, z)\}$ sse (def. ordinamento sui multinsiemi) $f(g(a, f(y, z)), y) \succ_{rpo} f(y, z)$ sse (def. rpo con $f = f$) $\{g(a, f(y, z)), y\} \ggcurly_{rpo} \{y, z\}$ sse (def. ordinamento sui multinsiemi) $g(a, f(y, z)) \succ_{rpo} z$, che è verificata per la proprietà del sottotermine o per la clausola (iv) dell'rpo generalizzato. Quindi, poiché abbiamo mostrato che $g(x, f(g(a, f(y, z)), y)) \succ_{rpo} g(x, f(y, z))$, la prima equazione viene orientata da sinistra a destra ottenendo la regola $g(x, f(g(a, f(y, z)), y)) \rightarrow g(x, f(y, z))$.

Vediamo se $g(f(x, y), z) \succ_{rpo} f(x, g(y, z))$. Poiché $g > f$, per def. rpo tale disuguaglianza è vera sse $\{g(f(x, y), z)\} \succ\succ_{rpo} \{x, g(y, z)\}$ sse (def. ordinamento sui multinsiemi) $g(f(x, y), z) \succ_{rpo} x$ (vera per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo generalizzato) e $g(f(x, y), z) \succ_{rpo} g(y, z)$. Quest'ultima è vera sse (def. rpo con $g = g$) $\{f(x, y), z\} \succ\succ_{rpo} \{y, z\}$ sse (def. ordinamento sui multinsiemi) $f(x, y) \succ_{rpo} y$ (vera per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo generalizzato). Quindi la regola risultante è $g(f(x, y), z) \rightarrow f(x, g(y, z))$.

Infine, vediamo se $g(k(x), f(y, x)) \succ_{rpo} k(f(x, y))$. Poiché $g < k$ nell'ordinamento su Σ, per la clausola (iii) della definizione di rpo dovremmo avere $\{k(x), f(y, x)\} \not\succ\succ_{rpo} \{k(f(x, y))\}$, ma né $k(x)$ né $f(y, x)$ risultano $\not\succeq_{rpo}$ di $k(f(x, y))$. Allora proviamo a verificare se $k(f(x, y)) \succ_{rpo} g(k(x), f(y, x))$.[1] Poiché $k > g$, per def. rpo si ha $\{k(f(x, y))\} \succ\succ_{rpo} \{k(x), f(y, x)\}$ sse (def. ordinamento sui multinsiemi) sono vere le disuguaglianze del seguente sistema:

$$\begin{array}{l} k(f(x, y)) \succ_{rpo} k(x) \\ k(f(x, y)) \succ_{rpo} f(y, x) \end{array}$$

La prima disuguaglianza è vera sse (essendo $k = k$) $\{f(x, y)\} \succ\succ_{rpo} \{x\}$ sse $f(x, y) \succ_{rpo} x$ (vera per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo generalizzato). La seconda disuguaglianza è vera sse (essendo $k > f$) si ha $\{k(f(x, y))\} \succ\succ_{rpo} \{y, x\}$ sse $k(f(x, y)) \succ_{rpo} y$ e $k(f(x, y)) \succ_{rpo} x$, che sono entrambe vere per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo generalizzato.

Quindi l'srt R terminante rispetto all'ordinamento dato è il seguente:

$$\begin{array}{rcl} g(x, f(g(a, f(y, z)), y)) & \rightarrow & g(x, f(y, z)) \\ g(f(x, y), z) & \rightarrow & f(x, g(y, z)) \\ k(f(x, y)) & \rightarrow & g(k(x), f(y, x)) \end{array}$$

[1] Non si può affermare che ciò vale perché non vale l'orientamento opposto, in quanto l'ordinamento sui termini è in generale parziale, quindi i due termini potrebbero essere non confrontabili rispetto all'ordinamento dato. Da ciò segue che occorre sempre verificare formalmente che un termine è maggiore di un altro nell'ordinamento dato.

(II) *Determinare un ordinamento sui termini $\succ$ tale che un srt R sia terminante rispetto all'ordinamento $\succ$.*

Consideriamo l'esercizio T14 in [1].
Sia dato il seguente sistema di riscrittura R sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} g(a,x) & \to & x \\ g(h(x),y) & \to & h(g(x,y)) \\ f(a) & \to & a \\ f(h(a)) & \to & h(a) \\ f(h(h(x))) & \to & g(f(x), f(h(x))) \end{array}$$

Determinare un ordinamento sui termini rispetto al quale R risulti terminante. Giustificare la risposta.

In base ad un qualsiasi ordinamento di semplificazione $\succ$ siamo in grado di giustificare l'orientamento delle regole 1, 3 e 4, in quanto $g(a,x) \succ x$, $f(a) \succ a$ e $f(h(a)) \succ h(a)$ per la proprietà del sottotermine. Ma tale ordinamento non è sufficiente per giustificare l'orientamento delle regole 2 e 5, per cui occorre passare ad un rpo $\succ_{rpo}$, ovvero occorre individuare un ordinamento sulla segnatura Σ tale che R sia terminante rispetto all'rpo basato su tali precedenze. Ovviamente, le tre disuguaglianze date sopra per le regole 1, 3 e 4 valgono anche per $\succ_{rpo}$, in quanto un rpo è un ordinamento di semplificazione.

Regola 2: possiamo derivare $g(h(x),y) \succ_{rpo} h(g(x,y))$ applicando la definizione di rpo, ponendo $g > h$ e verificando se $\{g(h(x),y)\} \ggcurly_{rpo} \{g(x,y)\}$. Ciò è vero sse (def. ordinamento sui multinsiemi) $g(h(x),y) \succ_{rpo} g(x,y)$ sse (essendo $g = g$) $\{h(x),y\} \ggcurly_{rpo} \{x,y\}$ sse $h(x) \succ_{rpo} x$ che risulta vera per prop. sottotermine o clausola (iv) dell'rpo generalizzato.

Regola 5: $f(h(h(x))) \succ_{rpo} g(f(x), f(h(x)))$ se poniamo $f > g$ e proviamo che $\{f(h(h(x)))\} \ggcurly_{rpo} \{f(x), f(h(x))\}$. Ciò è vero sse $f(h(h(x))) \succ_{rpo} f(x)$ e $f(h(h(x))) \succ_{rpo} f(h(x))$. [2] Per def. ordinamento sui multinsiemi e def. rpo con $f = f$, la prima disuguaglianza si riduce a provare $h(h(x)) \succ_{rpo} x$ (vera per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo gen.), mentre la seconda si riduce a provare $h(h(x)) \succ_{rpo} h(x)$ (vera per prop. sottotermine).

Quindi R è terminante rispetto ad un ordinamento rpo basato sulle precedenze $f > g > h$.

[2] Nel seguito potrà capitare di tralasciare qualche passo nelle derivazioni formali.

Consideriamo l'esercizio T1 in [1].
Dato il sistema di riscrittura R:

$$\begin{array}{rcl} h(z, g(x, y)) & \to & g(k(x), h(z, y)) \\ g(k(x), k(y)) & \to & k(g(x, y)) \end{array}$$

determinare un ordinamento sugli operatori $\{g, h, k\}$ tale che il sistema R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tali precedenze. Motivare la risposta.

Il testo dell'esercizio suggerisce già che l'ordinamento da determinare è un rpo. Occorre individuare le precedenze, i.e. l'ordinamento (parziale) sulla segnatura $\{g, h, k\}$. Affinché si abbia $h(z, g(x, y)) \succ_{rpo} g(k(x), h(z, y))$, si può porre $h > g$ e verificare $\{h(z, g(x, y))\} \succ\!\!\succ_{rpo} \{k(x), h(z, y)\}$. Ciò vale sse (def. ordinamento sui multinsiemi)

$$\begin{array}{l} h(z, g(x, y)) \succ_{rpo} k(x) \\ h(z, g(x, y)) \succ_{rpo} h(z, y) \end{array}$$

Per derivare la prima disuguaglianza è sufficiente porre $h > k$ riducendosi a provare $h(z, g(x, y)) \succ_{rpo} x$, che è vera per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo gen. Per la seconda si ha $h = h$ e $\{z, g(x, y)\} \succ\!\!\succ_{rpo} \{z, y\}$ sse $g(x, y) \succ_{rpo} y$ (vera per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo gen.).

Affinché si abbia $g(k(x), k(y)) \succ_{rpo} k(g(x, y))$ si può porre $g > k$ e provare $g(k(x), k(y)) \succ_{rpo} g(x, y)$. Essendo $g = g$, si ha $\{k(x), k(y)\} \succ\!\!\succ_{rpo} \{x, y\}$ sse $k(x) \succ_{rpo} x$ e $k(y) \succ_{rpo} y$, entrambe vere per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo gen.

Quindi R è terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $h > g$, $h > k$ e $g > k$ che possono essere scritte anche come $h > g > k$, da cui segue per transitività $h > k$.

N.B. Dato un srt terminante, non è detto che un ordinamento di riduzione sia l'unico ordinamento rispetto al quale tale srt sia terminante.

(III) *Verificare che un srt* R *non è terminante rispetto ad alcun ordinamento di riduzione di tipo* rpo.

Consideriamo l'esercizio T4 in [1].
Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$:

$$\begin{array}{lcl} k(h(x)) & \rightarrow & h(k(x)) \\ k(g(x)) & \rightarrow & h(h(g(x))) \\ f(h(x)) & \rightarrow & f(k(x)) \end{array}$$

Mostrare che non esiste alcun ordinamento sugli operatori in Σ tale che R sia terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento.

Regola 1: $k(h(x)) \succ_{rpo} h(k(x))$ se $k > h$ e $k(h(x)) \succ_{rpo} k(x)$ sse (essendo $k = k$) $h(x) \succ_{rpo} x$ (vera per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo gen.)
Regola 2: $k(g(x)) \succ_{rpo} h(h(g(x)))$ se $k > h$ e $k(g(x)) \succ_{rpo} h(g(x))$ sse $k > h$ e $k(g(x)) \succ_{rpo} g(x)$ (vera per prop. sottotermine).
Regola 3: $f(h(x)) \succ_{rpo} f(k(x))$ sse (essendo $f = f$) $h(x) \succ_{rpo} k(x)$. Qui l'unica possibilità è avere $h > k$ per concludere $h(x) \succ_{rpo} x$ per prop. sottotermine o clausola (iv) rpo gen. Ma $h > k$ è in contrasto con l'assunzione $k > h$ fatta per giustificare l'orientamento delle prime due regole. Vediamo se, assumendo $h > k$ invece che $k > h$, si riesce a giustificare l'orientamento della prima regola derivando $k(h(x)) \succ_{rpo} h(k(x))$. Applicando la clausola (iii) della definizione di rpo con $k < h$ si deve provare $\{h(x)\} \succ\!\succcurlyeq_{rpo} \{h(k(x))\}$ sse $h(x) \succcurlyeq_{rpo} h(k(x))$ sse (essendo $h = h$) $x \succcurlyeq_{rpo} k(x)$, che è falso. Lo stesso ragionamento vale per la seconda regola nell'ipotesi $h > k$. Quindi non è possibile trovare un ordinamento sulla segnatura tale che R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento.

Riferimenti

[1] M. Nesi, Esercizi di Riscrittura,
in `http://www.di.univaq.it/monica/MFI/EserciziR.pdf`.