Corso di Laurea in Informatica

Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2008-09)

E-unificazione: alcuni esercizi

Monica Nesi

Consideriamo i seguenti problemi di E-unificazione presi dalla collezione di esercizi in `http://www.di.univaq.it/monica/MFI/EserciziR.pdf`.

Esercizio E2. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h, k\}$:

$$\begin{array}{rcl} g(a,x) & \rightarrow & a \\ g(h(x),y) & \rightarrow & f(k(y), g(x,y)) \\ k(a) & \rightarrow & a \end{array}$$

Risolvere modulo E l'equazione $g(x, y) = k(y)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Il sistema dato R è canonico, quindi può essere applicato l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing. Inoltre, cercheremo di applicare la versione basilare e normale di tale algoritmo, utilizzando la definizione di posizioni basilari e normalizzando rispetto ad R prima di applicare passi di narrowing. Con l'espressione "albero completo delle derivazioni di narrowing" si intende lo sviluppo *completo in ampiezza* dei primi livelli dell'albero, a seconda della complessità del problema. In questo esempio è sufficiente sviluppare i primi due livelli completi dell'albero.

Si parte con il goal iniziale $||(g(x, y), k(y))$, che etichetta la radice dell'albero delle derivazioni di narrowing. I due termini del goal sono in forma normale rispetto ad R e non unificano sintatticamente. Le posizioni iniziali sono $Pos_0 = \{\epsilon, 1, 2\}$.

Primo livello

È possibile applicare tre diversi passi di narrowing, per cui si hanno tre rami a partire dalla radice:

I.1. Narrowing su $p = 1$ con la prima regola (opportunamente ridenominata [1]) $g(a, x_1) \rightarrow a$ ed mgu $\sigma_1 = \{a/x,\ y/x_1\}$. Il nuovo goal è $||(a, k(y))$, è normalizzato in R ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 2\}$.

I.2. Narrowing su $p = 1$ con la seconda regola (opportunamente ridenominata [2]) $g(h(x_1), y_1) \rightarrow f(k(y_1), g(x_1, y_1))$ ed mgu $\sigma_1 = \{h(x_1)/x,\ y/y_1\}$. Il nuovo goal è $||(f(k(y), g(x_1, y)), k(y))$, è normalizzato in R ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$.

I.3. Narrowing su $p = 2$ con la terza regola $k(a) \rightarrow a$ ed mgu $\sigma_1 = \{a/y\}$. Il nuovo goal è $||(g(x, a), a)$, è normalizzato in R ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 2\}$.

Secondo livello
II.1. A partire dal goal $||(a, k(y))$ di I.1 con $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 2\}$ è possibile applicare un solo passo di narrowing su $p = 2$ con la terza regola $k(a) \rightarrow a$ ed mgu $\sigma_2 = \{a/y\}$. Il nuovo goal è $||(a, a)$, i cui termini unificano sintatticamente con mgu $\mu = id$, per cui si ha terminazione con successo del cammino con la sostituzione E-unificatrice σ data dalla composizione $\sigma = \mu \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \{a/y,\ a/x,\ a/x_1\}$. Considerando solo i legami per le variabili dell'equazione iniziale, si ha la soluzione $x = a,\ y = a$.
Per verificare che questa è effettivamente una soluzione dell'equazione data, è sufficiente rimpiazzare i valori trovati per le variabili x ed y nell'equazione e utilizzare la procedura di decisione per il problema della parola in E. Quindi, l'quivalenza da controllare è $\sigma(g(x, y)) =_E \sigma(k(y))$, ovvero $g(a, a) =_E k(a)$. I due termini si riducono alla stessa forma normale in R applicando la prima e la terza regola, ovvero le due regole applicate lungo la derivazione dell'albero di narrowing che ha portato alla soluzione.

II.2. A partire dal goal $||(f(k(y), g(x_1, y)), k(y))$ di I.2 con $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$, è possibile applicare quattro passi di narrowing:

II.2.1. Narrowing su $p = 1.1$ con la terza regola $k(a) \rightarrow a$ ed mgu $\sigma_2 = \{a/y\}$.

[1] La ridenominazione è necessaria per evitare conflitti tra le variabili della regola usata e quelle del goal e con quelle delle altre regole usate lungo il cammino considerato. Si ricorda che una E-unificatrice è ottenuta componendo le sostituzioni di narrowing applicate lungo un cammino che termina con successo e noi siamo interessati solo a unificatrici idempotenti.

[2] Nota che lungo un cammino è possibile utilizzare ridenominazioni uguali a quelle usate lungo altri cammini.

Il nuovo goal è $||(f(a, g(x_1, a)), k(a))$ ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $\{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$. Il nuovo goal non è normalizzato rispetto ad R. Riscrivendo il goal con la terza regola in posizione $p = 2$, si ottiene il goal normalizzato $||(f(a, g(x_1, a)), a)$ ed il nuovo insieme di posizioni basilari $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$.

II.2.2. Narrowing su $p = 1.2$ con la prima regola $g(a, x_2) \to a$ ed mgu $\sigma_2 = \{a/x_1,\ y/x_2\}$. Il nuovo goal è $||(f(k(y), a), k(y))$, è normalizzato in R ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$.

II.2.3. Narrowing su $p = 1.2$ con la regola $g(h(x_2), y_2) \to f(k(y_2), g(x_2, y_2))$ ed mgu $\sigma_2 = \{h(x_2)/x_1,\ y/y_2\}$. Si ottiene $||(f(k(y), f(k(y), g(x_2, y))), k(y))$, che è normalizzato in R, ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 1.2.1, 1.2.2, 2\}$.

II.2.4. Narrowing su $p = 2$ con la terza regola $k(a) \to a$ ed mgu $\sigma_2 = \{a/y\}$. Il nuovo goal è $||(f(k(a), g(x_1, a)), a)$ ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $\{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$. Questo goal non è normalizzato rispetto ad R. Riscrivendolo con la terza regola in posizione $p = 1.1$, si ottiene il goal normalizzato $||(f(a, g(x_1, a)), a)$ ed il nuovo insieme di posizioni basilari $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$. Goal e posizioni coincidono con quelli del nodo II.2.1.

II.3. A partire dal goal $||(g(x, a), a)$ di I.3 con $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 2\}$, è possibile applicare due passi di narrowing:

II.3.1. Narrowing su $p = 1$ con la prima regola $g(a, x_2) \to a$ ed mgu $\sigma_2 = \{a/x,\ a/x_2\}$. Il nuovo goal è $||(a, a)$, i cui termini unificano sintatticamente con mgu $\mu = id$, per cui si ha terminazione con successo del cammino con la sostituzione E-unificatrice $\sigma = \mu \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \{a/x,\ a/x_2,\ a/y\}$. Considerando solo i legami per le variabili dell'equazione iniziale, la soluzione è $x = a,\ y = a$, ovvero abbiamo un cammino diverso che deriva la stessa soluzione del nodo II.1.

II.3.2 Narrowing su $p = 1$ con la regola $g(h(x_2), y_2) \to f(k(y_2), g(x_2, y_2))$ ed mgu $\sigma_2 = \{h(x_2)/x,\ a/y_2\}$. Il nuovo goal è $||(f(k(a), g(x_2, a)), a)$ ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $\{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$. Questo goal non è normalizzato rispetto ad R. Riscrivendolo con la terza regola in posizione $p = 1.1$, si ottiene il goal normalizzato $||(f(a, g(x_2, a)), a)$ ed il nuovo insieme di posizioni basilari $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.2, 2\}$.

Ciò completa lo sviluppo del secondo livello dell'albero (infinito) di derivazioni di narrowing.

Esercizio E4. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{array}{rcl} h(h(x)) & \rightarrow & x \\ g(f(x), y) & \rightarrow & f(g(x, y)) \\ g(a, x) & \rightarrow & x \end{array}$$

Risolvere modulo E l'equazione $g(x, f(h(y))) = f(x)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Anche in questo caso è sufficiente sviluppare i primi due livelli completi dell'albero. Dato il goal iniziale $||(g(x, f(h(y))), f(x))$, si ha che i due termini del goal sono in forma normale rispetto ad R e non unificano sintatticamente. Le posizioni iniziali sono $Pos_0 = \{\epsilon, 1, 1.2, 1.2.1, 2\}$.

Primo livello
È possibile applicare tre diversi passi di narrowing:

I.1. Narrowing su $p = 1$ con la seconda regola $g(f(x_1), y_1) \rightarrow f(g(x_1, y_1))$ ed mgu $\sigma_1 = \{f(x_1)/x,\ f(h(y))/y_1\}$.
Si ottiene il goal $||(f(g(x_1, f(h(y)))), f(f(x_1)))$ (normalizzato in R) e l'insieme di posizioni basilari $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 1.1, 2\}$.

I.2. Narrowing su $p = 1$ con la terza regola $g(a, x_1) \rightarrow x_1$ ed mgu $\sigma_1 = \{a/x,\ f(h(y))/x_1\}$. Si ottiene il goal $||(f(h(y)), f(a))$ (normalizzato in R) e l'insieme di posizioni basilari $Pos_1 = \{\epsilon, 2\}$. I termini del goal non unificano sintatticamente e non è possibile applicare alcun passo di narrowing nelle posizioni in Pos_1, per cui tale derivazione termina con fallimento.

I.3. Narrowing su $p = 1.2.1$ con la prima regola $h(h(x_1)) \rightarrow x_1$ ed mgu $\sigma_1 = \{h(x_1)/y\}$. Il nuovo goal (normalizzato in R) è $||(g(x, f(x_1)), f(x))$ e l'insieme di posizioni basilari è $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 1.2, 2\}$.

Secondo livello
II.1. A partire dal goal $||(f(g(x_1, f(h(y)))), f(f(x_1)))$ di I.1 con $Pos_1 =$

$\{\epsilon, 1, 1.1, 2\}$, è possibile applicare due passi di narrowing:

II.1.1. Narrowing su $p = 1.1$ con la seconda regola $g(f(x_2), y_2) \to f(g(x_2, y_2))$ ed mgu $\sigma_2 = \{f(x_2)/x_1,\ f(h(y))/y_2\}$.
Il nuovo goal è $||(f(f(g(x_2, f(h(y))))), f(f(f(x_2))))$ (normalizzato in R) e $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.1.1, 2\}$.

II.1.2 Narrowing su $p = 1.1$ con la terza regola $g(a, x_2) \to x_2$ ed mgu $\sigma_2 = \{a/x_1,\ f(h(y))/x_2\}$. Il nuovo goal è $||(f(f(h(y))), f(f(a)))$ (normalizzato in R) e $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 2\}$. I termini del goal non unificano sintatticamente e non è possibile applicare alcun passo di narrowing nelle posizioni in Pos_2, per cui tale derivazione termina con fallimento.

II.3. A partire dal goal $||(g(x, f(x_1)), f(x))$ di I.3 con $Pos_1 = \{\epsilon, 1, 1.2, 2\}$, è possibile applicare due passi di narrowing:

II.3.1. Narrowing su $p = 1$ con la seconda regola $g(f(x_2), y_2) \to f(g(x_2, y_2))$ ed mgu $\sigma_2 = \{f(x_2)/x,\ f(x_1)/y_2\}$.
Il nuovo goal è $||(f(g(x_2, f(x_1))), f(f(x_2)))$ (normalizzato in R) e $Pos_2 = \{\epsilon, 1, 1.1, 2\}$.

II.3.2 Narrowing su $p = 1$ con la terza regola $g(a, x_2) \to x_2$ ed mgu $\sigma_2 = \{a/x,\ f(x_1)/x_2\}$. Il nuovo goal è $||(f(x_1), f(a))$ (normalizzato in R) ed il nuovo insieme di posizioni basilari è $\{\epsilon, 2\}$. I termini del goal unificano sintatticamente con mgu $\mu = \{a/x_1\}$, per cui si ha la sostituzione E-unificatrice $\sigma = \{a/x_1,\ a/x,\ f(a)/x_2,\ h(a)/y\}$. Considerando solo i legami per le variabili dell'equazione iniziale, si ha la soluzione $x = a,\ y = h(a)$.
Verifica: $\sigma(g(x, f(h(y)))) =_E \sigma(f(x))$, ovvero $g(a, f(h(h(a)))) =_E f(a)$. Il termine $f(a)$ è in forma normale rispetto ad R, mentre il primo termine si riduce ad $f(a)$ applicando la terza e la prima regola di R (o viceversa), ovvero le due regole applicate lungo la derivazione dell'albero di narrowing che ha portato alla soluzione.

Ciò completa lo sviluppo del secondo livello dell'albero (infinito) di derivazioni di narrowing. Notare come in questo esercizio l'utilizzo delle posizioni basilari permetta di "tagliare" alcuni cammini dell'albero, che rappresentano invece derivazioni possibili nel caso in cui non venga applicata l'ottimizzazione delle posizioni basilari.