Corso di Laurea in Informatica
Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2008-09)

Divergenza del completamento: esempi

Monica Nesi

Esempio 1 Consideriamo la seguente teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{f, g\}$ costituita da una sola equazione:

$$f(g(f(x))) \quad = \quad g(f(x))$$

Supponiamo di voler completare E rispetto ad un ordinamento di riduzione $\succ$. È sufficiente un ordinamento di semplificazione qualsiasi, in quanto per la proprietà del sottotermine si ha $f(g(f(x))) \succ g(f(x))$. Applicando la regola Orienta si ottiene il seguente srt R:

$$1. \quad f(g(f(x))) \quad \rightarrow \quad g(f(x))$$

Notare che l'equazione di E può essere orientata solo da sx a dx, in quanto l'orientamento contrario porta alla non terminazione della relazione di riscrittura.

Applicando la regola Uguaglia per il calcolo delle coppie critiche e poi verificando se sono convergenti, notiamo che la regola 1 si sovrappone su se stessa. Data una variante $1'$. $f(g(f(y))) \rightarrow g(f(y))$ della regola 1, otteniamo:

1. $cc(1, 1')$ su $p = 1.1$ con mgu $\sigma = \{g(f(x))/y\}$

$$\begin{array}{ccc} & f(g(f(g(f(x))))) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ f(g(g(f(x)))) & & g(f(g(f(x)))) \\ & & \downarrow \\ & & g(g(f(x))) \end{array}$$

Il lato dx della c.c. può essere ridotto tramite la regola 1 in posizione 1 ottenendo $g(g(f(x)))$ che è un sottotermine del lato sx della c.c. non convergente. Quindi, si aggiunge all'srt corrente la seguente regola:

$$2. \quad f(g(g(f(x')))) \rightarrow g(g(f(x')))$$

2. $cc(1,2)$ su $p = 1.1.1$ con mgu $\sigma = \{g(f(x))/x'\}$

$$\begin{array}{ccc} & f(g(g(f(g(f(x)))))) & \\ \swarrow & & \searrow \\ f(g(g(g(f(x))))) & & g(g(f(g(f(x))))) \\ & & \downarrow \\ & & g(g(g(f(x)))) \end{array}$$

Anche in questo caso il lato dx della c.c. può essere ridotto tramite la regola 1 in posizione 1.1 ottenendo $g(g(g(f(x))))$ che è un sottotermine del lato sx della c.c. non convergente. Quindi, si aggiunge all'srt corrente la seguente regola:

$$3. \quad f(g(g(g(f(x''))))) \rightarrow g(g(g(f(x''))))$$

Andando avanti con il calcolo delle c.c. e la procedura di completamento, si può notare che la regola 1 e le regole derivate da c.c. si sovrappongono tra loro generando una catena infinita di regole. Si ha quindi un completamento (non terminante) divergente, nel senso che l'srt R canonico equivalente ad E esiste all'infinito ed è costituito da un numero infinito di regole. In alcuni casi di divergenza del completamento, l'insieme infinito di regole può essere formalizzato in modo finito tramite un *pattern di divergenza*, ovvero una regola di ordine superiore o *meta-regola* (secondo l'approccio di H. Kirchner) che caratterizza in maniera finita un insieme infinito di regole. Nell'esempio considerato il pattern di divergenza è il seguente:

$$\{f(g^n(f(x))) \rightarrow g^n(f(x)) \ \mid \ n \geq 1\}$$

Si può verificare che per $n = 1$ il pattern di divergenza diventa la regola 1, per $n = 2$ si ha la regola 2, etc.

Esempio 2 Consideriamo l'esercizio C12 in [1].

Sia data la teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{e, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(x, x) &= e \\ f(g(x), y) &= g(f(x, y)) \end{aligned}$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un rpo $\succ_{rpo}$ basato sulle precedenze $f > g > e$) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Applicando la regola Orienta sulla prima equazione si ha $f(x, x) \succ_{rpo} e$ per definizione di rpo, poiché $f > e$ e $\{f(x, x)\} \succ\succ_{rpo} \emptyset$.
Per quanto riguarda la seconda equazione si ha $f(g(x), y) \succ_{rpo} g(f(x, y))$, poiché $f > g$ e $\{f(g(x), y)\} \succ\succ_{rpo} \{f(x, y)\}$ sse $f(g(x), y) \succ_{rpo} f(x, y)$ sse $f = f$ e $\{g(x), y\} \succ\succ_{rpo} \{x, y\}$ sse $g(x) \succ_{rpo} x$, vero per la proprietà del sottotermine. Quindi, si ottiene il seguente srt R (con le regole opportunamente ridenominate):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_1) &\rightarrow e \\ f(g(x_2), y_2) &\rightarrow g(f(x_2, y_2)) \end{aligned}$$

Applicando la regola Uguaglia per il calcolo delle coppie critiche e poi verificando se sono convergenti, otteniamo:

1. $cc(1, 2)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{g(x_2)/x_1,\ g(x_2)/y_2\}$

$$\begin{tikzcd} & f(g(x_2), g(x_2)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ e & & g(f(x_2, g(x_2))) \end{tikzcd}$$

La c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Applicando la definizione di rpo, essendo $g > e$, si ha $g(f(x_2, g(x_2))) \succ_{rpo} e$. Quindi, la nuova regola da inserire nell'srt corrente è:

$$3. \quad g(f(x_3, g(x_3))) \rightarrow e$$

2. $cc(2, 3)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{g(x_2)/x_3,\ g(g(x_2))/y_2\}$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & g(f(g(x_2), g(g(x_2)))) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
g(g(f(x_2, g(g(x_2))))) & & e
\end{tikzcd}
$$

Anche questa c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Essendo $g > e$, per definizione di rpo si ha $g(g(f(x_2, g(g(x_2))))) \succ_{rpo} e$. Quindi, la nuova regola da inserire nell'srt corrente è:

$$4. \quad g(g(f(x_4, g(g(x_4))))) \rightarrow e$$

3. $cc(3,2)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{f(x_3, g(x_3))/x_2\}$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & f(g(f(x_3, g(x_3))), y_2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f(e, y_2) & & g(f(f(x_3, g(x_3)), y_2))
\end{tikzcd}
$$

La c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Per orientare la c.c. mostriamo che $g(f(f(x_3, g(x_3)), y_2)) \succ_{rpo} f(e, y_2)$. Essendo $g < f$, per definizione di rpo si ha $\{f(f(x_3, g(x_3)), y_2)\} \succcurlyeq\!\succcurlyeq_{rpo} \{f(e, y_2)\}$ sse $f(f(x_3, g(x_3)), y_2) \succcurlyeq_{rpo} f(e, y_2)$ sse $f = f$ e $\{f(x_3, g(x_3)), y_2\} \succcurlyeq\!\succcurlyeq_{rpo} \{e, y_2\}$ sse $f(x_3, g(x_3)) \succcurlyeq_{rpo} e$ sse $f > e$ e $\{f(x_3, g(x_3))\} \succcurlyeq\!\succcurlyeq_{rpo} \emptyset$, vero per definizione di $\succcurlyeq\!\succcurlyeq_{rpo}$. Quindi, la nuova regola da inserire nell'srt corrente è:

$$5. \quad g(f(f(x_5, g(x_5)), y_5)) \rightarrow f(e, y_5)$$

4. $cc(2,4)$ su $p = 1.1$ con mgu $\sigma = \{g(x_2)/x_4,\ g(g(g(x_2)))/y_2\}$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & g(g(f(g(x_2), g(g(g(x_2)))))) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
g(g(g(f(x_2, g(g(g(x_2))))))) & & e
\end{tikzcd}
$$

In modo simile alle precedenti c.c., si ha che la c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Essendo $g > e$, per definizione di rpo si ha $g(g(g(f(x_2, g(g(g(x_2))))))) \succ_{rpo} e$. Quindi, la nuova regola da inserire nell'srt corrente è:

$$6. \quad g(g(g(f(x_6, g(g(g(x_6))))))) \to e$$

Continuando con il calcolo delle c.c. e la procedura di completamento, si ha che le regole dell'srt corrente si sovrappongono tra loro generando una catena infinita di regole. Il completamento diverge ed un pattern di divergenza è il seguente:

$$\{g^n(f(x, g^n(x))) \to e \quad | \quad n \geq 1\}$$

Si può verificare che per $n = 1$ il pattern di divergenza diventa la regola 3, per $n = 2$ si ha la regola 4, per $n = 3$ si ha la regola 6, etc.

Riferimenti

[1] M. Nesi, Esercizi di Riscrittura,
in `http://www.di.univaq.it/monica/MFI/EserciziR.pdf`.