Corso di Laurea in Informatica

Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2008-09)

Un esercizio di completamento di teorie equazionali

Monica Nesi

Consideriamo una presentazione equazionale di un frammento della teoria dei gruppi tratta da [DJ90], che risulta particolarmente interessante dal punto di vista del completamento, in quanto durante l'applicazione di tale procedura possono essere utilizzate anche regole non basilari, come la regola Collassa, e possono essere eliminate equazioni tramite la regola Cancella. La teoria equazionale E di partenza (data usando una notazione prefissa) è la seguente:

$$\begin{array}{rcl}\bullet(x,1) & = & x\\ \bullet(1,x) & = & x\\ \bullet(I(x),\bullet(x,y)) & = & y\end{array}$$

Su una segnatura $\Sigma = \{1, I, \bullet\}$, le prime due equazioni di E esprimono che la costante 1 è un elemento neutro a dx e sx per l'operatore $\bullet$, mentre la terza equazione dice che se combiniamo tramite $\bullet$ l'inverso o opposto $I(x)$ di x con x stesso ed un y qualsiasi, tale termine equivale ad y.
Supponiamo di voler completare E rispetto ad un ordinamento rpo basato sulla precedenza $\bullet > 1$. Applicando la regola Orienta tre volte per orientare le tre equazioni di E e ridenominando opportunamente le variabili, otteniamo il seguente srt R:

$$\begin{array}{lccc}1. & \bullet(x_1,1) & \rightarrow & x_1\\ 2. & \bullet(1,x_2) & \rightarrow & x_2\\ 3. & \bullet(I(x_3),\bullet(x_3,y_3)) & \rightarrow & y_3\end{array}$$

Notare che per orientare le tre equazioni di E è sufficiente un qualsiasi ordinamento di semplificazione, in quanto per ogni regola si ha che il lato sx è maggiore del lato dx per la proprietà del sottotermine. Un ordinamento di semplificazione non è però sufficiente per orientare le coppie critiche non convergenti che saranno generate durante il completamento.

Applicando la regola Uguaglia per il calcolo delle coppie critiche e poi verificando se sono convergenti, otteniamo:

1. $cc(1,2)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{1/x_1,\ 1/x_2\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet(1,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 & \equiv & 1 \end{tikzcd}$$

La c.c. è banalmente convergente, in quanto i due termini della c.c. sono identici, quindi viene cancellata.

2. $cc(1,3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_1/x_3,\ 1/y_3\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet(I(x_1), \bullet(x_1, 1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bullet(I(x_1), x_1) & & 1 \end{tikzcd}$$

La c.c. non è convergente, è quindi un'equazione da orientare in regola con Orienta e, poiché $\bullet > 1$, per definizione di rpo si ha $\bullet(I(x_1), x_1) \succ_{rpo} 1$. Quindi la nuova regola da aggiungere all'srt R corrente (opportunamente ridenominata) è:

$$4. \quad \bullet\,(I(x_4), x_4) \rightarrow 1$$

3. $cc(2,3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{1/x_3,\ x_2/y_3\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet(I(1), \bullet(1, x_2)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bullet(I(1), x_2) & & x_2 \end{tikzcd}$$

La c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Per la proprietà del sottotermine si ha $\bullet(I(1), x_2) \succ_{rpo} x_2$, quindi applicando la regola di inferenza Orienta si ottiene la nuova regola:

$$5. \quad \bullet\,(I(1), x_5) \rightarrow x_5$$

4. $cc(3,3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_3)/x,\ \bullet(x_3, y_3)/y\}$

$$
\begin{array}{c}
\bullet(I(I(x_3)), \bullet(I(x_3), \bullet(x_3, y_3))) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\bullet(I(I(x_3)), y_3) \qquad \bullet(x_3, y_3)
\end{array}
$$

La c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Applicando la definizione di rpo si ha:
$\bullet(I(I(x_3)), y_3) \succ_{rpo} \bullet(x_3, y_3)$ sse $\{I(I(x_3)), y_3\} \succ\!\!\succ_{rpo} \{x_3, y_3\}$ sse
$I(I(x_3)) \succ_{rpo} x_3$, vero per la proprietà del sottotermine.
Quindi la nuova regola da inserire nell'srt corrente R è:

$$6. \quad \bullet\,(I(I(x_6)), y_6) \rightarrow \bullet(x_6, y_6)$$

5. $cc(1,4)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(1)/x_1,\ 1/x_4\}$

$$
\begin{array}{c}
\bullet(I(1), 1) \\
\swarrow \quad \searrow \\
I(1) \qquad 1
\end{array}
$$

La c.c. non è convergente e, poiché $I(1) \succ_{rpo} 1$ per la proprietà del sottotermine, si ha la nuova regola:

$$7. \quad I(1) \rightarrow 1$$

Con l'introduzione della regola 7 si può applicare la regola di inferenza Collassa sulla regola 5, in quanto il lato sx della 5 è riducibile con la 7. Pertanto, la regola 5 viene considerata come l'equazione $\bullet(I(1), x_5) = x_5$, su cui può essere applicata Normalizza a sinistra con le regole 7 e 2 ottenendo $x_5 = x_5$ che viene eliminata tramite Cancella. Quindi, la regola 5 non fa piú parte dell'srt R corrente.

6. $cc(4,3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_4)/x_3,\ x_4/y_3\}$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet(I(I(x_4)), \bullet(I(x_4), x_4)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(I(I(x_4)), 1) \arrow[d] & & x_4 \\
\bullet(x_4, 1) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Il lato sx della c.c. può essere ridotto tramite la regola 6 ottenendo $\bullet(x_4, 1)$ che si riduce nel lato dx della c.c. tramite la regola 1. Quindi la c.c. è convergente e non si aggiunge alcuna nuova regola in R. In termini delle regole del completamento ciò significa applicare Normalizza a sinistra e Cancella sull'equazione derivata dalla c.c.

7. $cc(4,6)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(x_6)/x_4,\ I(x_6)/y_6\}$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet(I(I(x_6)), I(x_6)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 & & \bullet(x_6, I(x_6))
\end{tikzcd}$$

La c.c. non è convergente e, poiché $\bullet > 1$, per la definizione di rpo si ha $\bullet(x_6, I(x_6)) \succ_{rpo} 1$ e quindi la nuova regola:

$$8. \quad \bullet\,(x_8, I(x_8)) \to 1$$

8. $cc(1,6)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(I(x_6))/x_1,\ 1/y_6\}$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet(I(I(x_6)), 1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
I(I(x_6)) & & \bullet(x_6, 1) \arrow[d] \\
 & & x_6
\end{tikzcd}$$

Il lato dx della c.c. può essere ridotto tramite la regola 1 ottenendo x_6. La c.c. non è convergente e per la proprietà del sottotermine si ha $I(I(x_6)) \succ_{rpo} x_6$ e quindi la nuova regola:

$$9. \quad I(I(x_6)) \to x_6$$

Con l'introduzione della regola 9 si può applicare la regola di inferenza Collassa sulla regola 6, in quanto il lato sx della 6 è riducibile con la 9. Pertanto, la regola 6 viene considerata come l'equazione $\bullet(I(I(x_6)), y_6) = \bullet(x_6, y_6)$, su cui può essere applicata Normalizza a sinistra con la regola 9 ottenendo $\bullet(x_6, y_6) = \bullet(x_6, y_6)$, che viene eliminata tramite Cancella. Quindi, la regola 6 non fa piú parte dell'srt R corrente.

9. $cc(7, 3)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{1/x_3\}$

$$\begin{tikzcd} & \bullet(I(1), \bullet(1, y_3)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bullet(1, \bullet(1, y_3)) \arrow[rr, "+"] & & y_3 \end{tikzcd}$$

10. $cc(7, 4)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{1/x_4\}$

$$\begin{tikzcd} & \bullet(I(1), 1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bullet(1, 1) \arrow[rr] & & 1 \end{tikzcd}$$

11. $cc(7, 8)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{1/x_8\}$

$$\begin{tikzcd} & \bullet(1, I(1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bullet(1, 1) \arrow[rr] & & 1 \end{tikzcd}$$

12. $cc(7, 9)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{1/x_9\}$

$$\begin{tikzcd} & I(I(1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ I(1) \arrow[rr] & & 1 \end{tikzcd}$$

13. $cc(2, 8)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{1/x_8,\ I(1)/x_2\}$

$$\begin{tikzcd} & \bullet(1, I(1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ I(1) \arrow[rr] & & 1 \end{tikzcd}$$

14. $cc(8,3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_8/x_3,\ I(x_8)/y_3\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(x_8), \bullet(x_8, I(x_8))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(x_8), 1) \rightarrow I(x_8) \end{array}$$

15. $cc(9,9)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{I(x)/x_9\}$

$$\begin{array}{c} I(I(I(x))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ I(x) \ \equiv \ I(x) \end{array}$$

16. $cc(9,3)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_3\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(I(x_9)), \bullet(I(x_9), y_3)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(x_9, \bullet(I(x_9), y_3)) \quad\ y_3 \end{array}$$

La c.c. non è convergente. Poiché si ha $\bullet(x_9, \bullet(I(x_9), y_3)) \succ_{rpo} y_3$ per la proprietà del sottotermine, si introduce la nuova regola:

$$10. \quad \bullet\ (x_{10}, \bullet(I(x_{10}), y_{10})) \rightarrow y_{10}$$

17. $cc(9,4)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_4\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(I(x_9)), I(x_9)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(x_9, I(x_9)) \rightarrow \ 1 \end{array}$$

18. $cc(9,8)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_8\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(x_9), I(I(x_9))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(x_9), x_9) \rightarrow \ 1 \end{array}$$

19. $cc(1,10)$ su $p=2$ con mgu $\sigma = \{I(x_{10})/x_1,\ 1/y_{10}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(x_{10}, \bullet(I(x_{10}), 1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(x_{10}, I(x_{10})) \arrow[rr] & & 1
\end{tikzcd}$$

20. $cc(2,10)$ su $p=\epsilon$ con mgu $\sigma = \{1/x_{10}, \bullet(I(1), y_{10})/x_2\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(1, \bullet(I(1), y_{10})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(I(1), y_{10}) \arrow[d] & & y_{10} \\
\bullet(1, y_{10}) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

21. $cc(3,10)$ su $p=2$ con mgu $\sigma = \{x_3/x_{10},\ \bullet(x_3, y_3)/y_{10}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(x_3, \bullet(I(x_3), \bullet(x_3, y_3))) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(x_3, y_3) & \equiv & \bullet(x_3, y_3)
\end{tikzcd}$$

22. $cc(4,10)$ su $p=2$ con mgu $\sigma = \{x_4/x_{10},\ x_4/y_{10}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(x_4, \bullet(I(x_4), x_4)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(x_4, 1) \arrow[rr] & & x_4
\end{tikzcd}$$

23. $cc(7,10)$ su $p=2.1$ con mgu $\sigma = \{1/x_{10}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(1, \bullet(I(1), y_{10})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(1, \bullet(1, y_{10})) \arrow[rr, "+"] & & y_{10}
\end{tikzcd}$$

24. $cc(8,10)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_{10})/x_8,\ I(I(x_{10}))/y_{10}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(x_{10}, \bullet(I(x_{10}), I(I(x_{10})))) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(x_{10}, 1) \arrow[dr] & & I(I(x_{10})) \arrow[dl] \\
& x_{10} &
\end{tikzcd}$$

25. $cc(9,10)$ su $p = 2.1$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_{10}\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(I(x_9), \bullet(I(I(x_9)), y_{10})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(I(x_9), \bullet(x_9, y_{10})) \arrow[rr] & & y_{10}
\end{tikzcd}$$

26. $cc(10,10)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x)/x_{10},\ \bullet(I(I(x)), y_{10})/y\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(x, \bullet(I(x), \bullet(I(I(x)), y_{10}))) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(x, y_{10}) & & \bullet(I(I(x)), y_{10}) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

27. $cc(10,3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_{10}/x_3,\ \bullet(I(x_{10}), y_{10})/y_3\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet(I(x_{10}), \bullet(x_{10}, \bullet(I(x_{10}), y_{10}))) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet(I(x_{10}), y_{10}) \arrow[rr, phantom, "\equiv"] & & \bullet(I(x_{10}), y_{10})
\end{tikzcd}$$

Non esistono ulteriori c.c., l'insieme di equazioni è vuoto e l'srt R ottenuto è terminante e localmente confluente, quindi è anche confluente e canonico. L'srt R è il seguente:

$$
\begin{array}{rcl}
\bullet(x,1) & \rightarrow & x \\
\bullet(1,x) & \rightarrow & x \\
\bullet(I(x),\bullet(x,y)) & \rightarrow & y \\
\bullet(I(x),x) & \rightarrow & 1 \\
I(1) & \rightarrow & 1 \\
\bullet(x,I(x)) & \rightarrow & 1 \\
I(I(x)) & \rightarrow & x \\
\bullet(x,\bullet(I(x),y)) & \rightarrow & y
\end{array}
$$

Nota che durante il completamento le regole di R possono essere generate in un ordine diverso a seconda della strategia seguita nella scelta delle regole, di cui occorre calcolare le c.c., e della strategia di riduzione delle c.c. Per esempio, data la c.c. (6), se il suo lato sx viene ridotto direttamente con la regola 1 (invece che usare la regola 6) si ottiene subito la regola 9.

Riferimenti

[DJ90] N. Dershowitz and J.-P. Jouannaud, 'Rewrite Systems', in *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Semantics*, J. van Leeuwen editor, North-Holland, 1990, pp. 243-320.