

Corso di Laurea in Informatica
Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2008-09)

Un esercizio di completamento di teorie equazionali

Monica Nesi

Consideriamo una presentazione equazionale di un frammento della teoria dei gruppi tratta da [DJ90], che risulta particolarmente interessante dal punto di vista del completamento, in quanto durante l'applicazione di tale procedura possono essere utilizzate anche regole non basilari, come la regola Collassa, e possono essere eliminate equazioni tramite la regola Cancella. La teoria equazionale E di partenza (data usando una notazione prefissa) è la seguente:

$$\begin{aligned}\bullet(x, 1) &= x \\ \bullet(1, x) &= x \\ \bullet(I(x), \bullet(x, y)) &= y\end{aligned}$$

Su una segnatura $\Sigma = \{1, I, \bullet\}$, le prime due equazioni di E esprimono che la costante 1 è un elemento neutro a dx e sx per l'operatore \bullet , mentre la terza equazione dice che se combiniamo tramite \bullet l'inverso o opposto $I(x)$ di x con x stesso ed un y qualsiasi, tale termine equivale ad y .

Supponiamo di voler completare E rispetto ad un ordinamento rpo basato sulla precedenza $\bullet > 1$. Applicando la regola Orienta tre volte per orientare le tre equazioni di E e ridenominando opportunamente le variabili, otteniamo il seguente srt R :

$$\begin{aligned}1. \quad & \bullet(x_1, 1) \quad \rightarrow \quad x_1 \\ 2. \quad & \bullet(1, x_2) \quad \rightarrow \quad x_2 \\ 3. \quad & \bullet(I(x_3), \bullet(x_3, y_3)) \quad \rightarrow \quad y_3\end{aligned}$$

Notare che per orientare le tre equazioni di E è sufficiente un qualsiasi ordinamento di semplificazione, in quanto per ogni regola si ha che il lato sx è maggiore del lato dx per la proprietà del sottotermine. Un ordinamento di semplificazione non è però sufficiente per orientare le coppie critiche non convergenti che saranno generate durante il completamento.

Applicando la regola Uguaglia per il calcolo delle coppie critiche e poi verificando se sono convergenti, otteniamo:

1. $cc(1, 2)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{1/x_1, 1/x_2\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(1, 1) \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \equiv 1 \end{array}$$

La c.c. è banalmente convergente, in quanto i due termini della c.c. sono identici, quindi viene cancellata.

2. $cc(1, 3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_1/x_3, 1/y_3\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(x_1), \bullet(x_1, 1)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(x_1), x_1) \quad 1 \end{array}$$

La c.c. non è convergente, è quindi un'equazione da orientare in regola con Orienta e, poiché $\bullet > 1$, per definizione di rpo si ha $\bullet(I(x_1), x_1) \succ_{rpo} 1$. Quindi la nuova regola da aggiungere all'srt R corrente (opportunitamente ridenominata) è:

$$4. \quad \bullet(I(x_4), x_4) \rightarrow 1$$

3. $cc(2, 3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{1/x_3, x_2/y_3\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(1), \bullet(1, x_2)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(1), x_2) \quad x_2 \end{array}$$

La c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Per la proprietà del sottotermini si ha $\bullet(I(1), x_2) \succ_{rpo} x_2$, quindi applicando la regola di inferenza Orienta si ottiene la nuova regola:

$$5. \quad \bullet(I(1), x_5) \rightarrow x_5$$

4. $cc(3, 3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_3)/x, \bullet(x_3, y_3)/y\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(I(x_3)), \bullet(I(x_3), \bullet(x_3, y_3))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(I(x_3)), y_3) \quad \bullet(x_3, y_3) \end{array}$$

La c.c. non è convergente ed è normalizzata rispetto all'srt corrente. Applicando la definizione di rpo si ha:

$\bullet(I(I(x_3)), y_3) \succ_{rpo} \bullet(x_3, y_3)$ sse $\{I(I(x_3)), y_3\} \succ_{rpo} \{x_3, y_3\}$ sse $I(I(x_3)) \succ_{rpo} x_3$, vero per la proprietà del sottotermino. Quindi la nuova regola da inserire nell'srt corrente R è:

$$6. \quad \bullet(I(I(x_6)), y_6) \rightarrow \bullet(x_6, y_6)$$

5. $cc(1, 4)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(1)/x_1, 1/x_4\}$

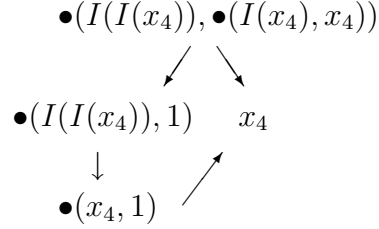
$$\begin{array}{c} \bullet(I(1), 1) \\ \swarrow \quad \searrow \\ I(1) \quad 1 \end{array}$$

La c.c. non è convergente e, poiché $I(1) \succ_{rpo} 1$ per la proprietà del sottotermino, si ha la nuova regola:

$$7. \quad I(1) \rightarrow 1$$

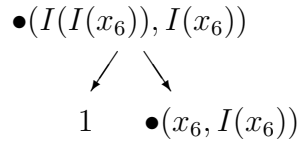
Con l'introduzione della regola 7 si può applicare la regola di inferenza Collassa sulla regola 5, in quanto il lato sx della 5 è riducibile con la 7. Pertanto, la regola 5 viene considerata come l'equazione $\bullet(I(1), x_5) = x_5$, su cui può essere applicata Normalizza a sinistra con le regole 7 e 2 ottenendo $x_5 = x_5$ che viene eliminata tramite Cancella. Quindi, la regola 5 non fa più parte dell'srt R corrente.

6. $cc(4, 3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_4)/x_3, x_4/y_3\}$



Il lato sx della c.c. può essere ridotto tramite la regola 6 ottenendo $\bullet(x_4, 1)$ che si riduce nel lato dx della c.c. tramite la regola 1. Quindi la c.c. è convergente e non si aggiunge alcuna nuova regola in R . In termini delle regole del completamento ciò significa applicare Normalizza a sinistra e Cancella sull'equazione derivata dalla c.c.

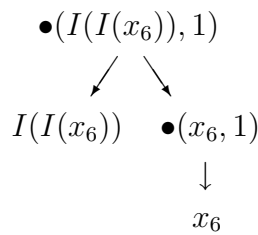
7. $cc(4, 6)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(x_6)/x_4, I(x_6)/y_6\}$



La c.c. non è convergente e, poiché $\bullet > 1$, per la definizione di rpo si ha $\bullet(x_6, I(x_6)) \succ_{rpo} 1$ e quindi la nuova regola:

$$8. \quad \bullet(x_6, I(x_6)) \rightarrow 1$$

8. $cc(1, 6)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(I(x_6))/x_1, 1/y_6\}$



Il lato dx della c.c. può essere ridotto tramite la regola 1 ottenendo x_6 . La c.c. non è convergente e per la proprietà del sottoterminale si ha $I(I(x_6)) \succ_{rpo} x_6$ e quindi la nuova regola:

$$9. \quad I(I(x_6)) \rightarrow x_6$$

Con l'introduzione della regola 9 si può applicare la regola di inferenza Collassa sulla regola 6, in quanto il lato sx della 6 è riducibile con la 9. Pertanto, la regola 6 viene considerata come l'equazione $\bullet(I(I(x_6)), y_6) = \bullet(x_6, y_6)$, su cui può essere applicata Normalizza a sinistra con la regola 9 ottenendo $\bullet(x_6, y_6) = \bullet(x_6, y_6)$, che viene eliminata tramite Cancella. Quindi, la regola 6 non fa più parte dell'srt R corrente.

9. $cc(7, 3)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{1/x_3\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(1), \bullet(1, y_3)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(1, \bullet(1, y_3)) \xrightarrow{+} y_3 \end{array}$$

10. $cc(7, 4)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{1/x_4\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(1), 1) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(1, 1) \rightarrow 1 \end{array}$$

11. $cc(7, 8)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{1/x_8\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(1, I(1)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(1, 1) \rightarrow 1 \end{array}$$

12. $cc(7, 9)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{1/x_9\}$

$$\begin{array}{c} I(I(1)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ I(1) \rightarrow 1 \end{array}$$

13. $cc(2, 8)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{1/x_8, I(1)/x_2\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(1, I(1)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ I(1) \rightarrow 1 \end{array}$$

14. $cc(8, 3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_8/x_3, I(x_8)/y_3\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(x_8), \bullet(x_8, I(x_8))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(x_8), 1) \rightarrow I(x_8) \end{array}$$

15. $cc(9, 9)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{I(x)/x_9\}$

$$\begin{array}{c} I(I(I(x))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ I(x) \equiv I(x) \end{array}$$

16. $cc(9, 3)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_3\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(I(x_9)), \bullet(I(x_9), y_3)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(x_9, \bullet(I(x_9), y_3)) \quad y_3 \end{array}$$

La c.c. non è convergente. Poiché si ha $\bullet(x_9, \bullet(I(x_9), y_3)) \succ_{rpo} y_3$ per la proprietà del sottotermine, si introduce la nuova regola:

$$10. \quad \bullet(x_{10}, \bullet(I(x_{10}), y_{10})) \rightarrow y_{10}$$

17. $cc(9, 4)$ su $p = 1$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_4\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(I(x_9)), I(x_9)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(x_9, I(x_9)) \rightarrow 1 \end{array}$$

18. $cc(9, 8)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_8\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(I(x_9), I(I(x_9))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(x_9), x_9) \rightarrow 1 \end{array}$$

19. $cc(1, 10)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_{10})/x_1, 1/y_{10}\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(x_{10}, \bullet(I(x_{10}), 1)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(x_{10}, I(x_{10})) \rightarrow 1 \end{array}$$

20. $cc(2, 10)$ su $p = \epsilon$ con mgu $\sigma = \{1/x_{10}, \bullet(I(1), y_{10})/x_2\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(1, \bullet(I(1), y_{10})) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(I(1), y_{10}) \quad y_{10} \\ \downarrow \quad \nearrow \\ \bullet(1, y_{10}) \end{array}$$

21. $cc(3, 10)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_3/x_{10}, \bullet(x_3, y_3)/y_{10}\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(x_3, \bullet(I(x_3), \bullet(x_3, y_3))) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(x_3, y_3) \equiv \bullet(x_3, y_3) \end{array}$$

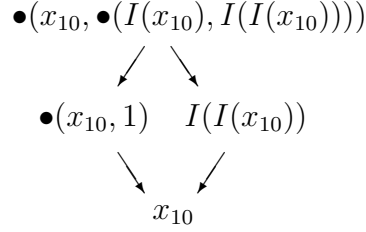
22. $cc(4, 10)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_4/x_{10}, x_4/y_{10}\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(x_4, \bullet(I(x_4), x_4)) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(x_4, 1) \rightarrow x_4 \end{array}$$

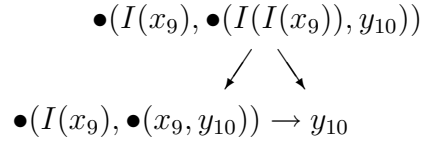
23. $cc(7, 10)$ su $p = 2.1$ con mgu $\sigma = \{1/x_{10}\}$

$$\begin{array}{c} \bullet(1, \bullet(I(1), y_{10})) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet(1, \bullet(1, y_{10})) \xrightarrow{+} y_{10} \end{array}$$

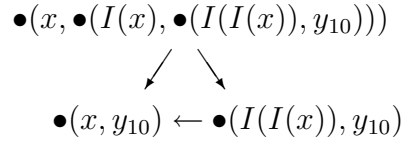
24. $cc(8, 10)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x_{10})/x_8, I(I(x_{10}))/y_{10}\}$



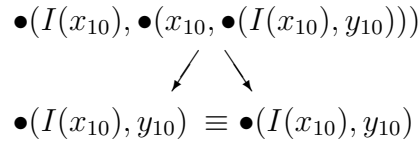
25. $cc(9, 10)$ su $p = 2.1$ con mgu $\sigma = \{I(x_9)/x_{10}\}$



26. $cc(10, 10)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{I(x)/x_{10}, \bullet(I(I(x)), y_{10})/y\}$



27. $cc(10, 3)$ su $p = 2$ con mgu $\sigma = \{x_{10}/x_3, \bullet(I(x_{10}), y_{10})/y_3\}$



Non esistono ulteriori c.c., l'insieme di equazioni è vuoto e l'srt R ottenuto è terminante e localmente confluyente, quindi è anche confluyente e canonico. L'srt R è il seguente:

$$\begin{aligned}
\bullet(x, 1) &\rightarrow x \\
\bullet(1, x) &\rightarrow x \\
\bullet(I(x), \bullet(x, y)) &\rightarrow y \\
\bullet(I(x), x) &\rightarrow 1 \\
I(1) &\rightarrow 1 \\
\bullet(x, I(x)) &\rightarrow 1 \\
I(I(x)) &\rightarrow x \\
\bullet(x, \bullet(I(x), y)) &\rightarrow y
\end{aligned}$$

Nota che durante il completamento le regole di R possono essere generate in un ordine diverso a seconda della strategia seguita nella scelta delle regole, di cui occorre calcolare le c.c., e della strategia di riduzione delle c.c. Per esempio, data la c.c. (6), se il suo lato sx viene ridotto direttamente con la regola 1 (invece che usare la regola 6) si ottiene subito la regola 9.

Riferimenti

[DJ90] N. Dershowitz and J.-P. Jouannaud, ‘Rewrite Systems’, in *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Semantics*, J. van Leeuwen editor, North-Holland, 1990, pp. 243-320.