Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 4
Ordinamento ottimo e *in loco*: Heapsort

(ovvero, come progettare algoritmi veloci usando strutture dati efficienti)

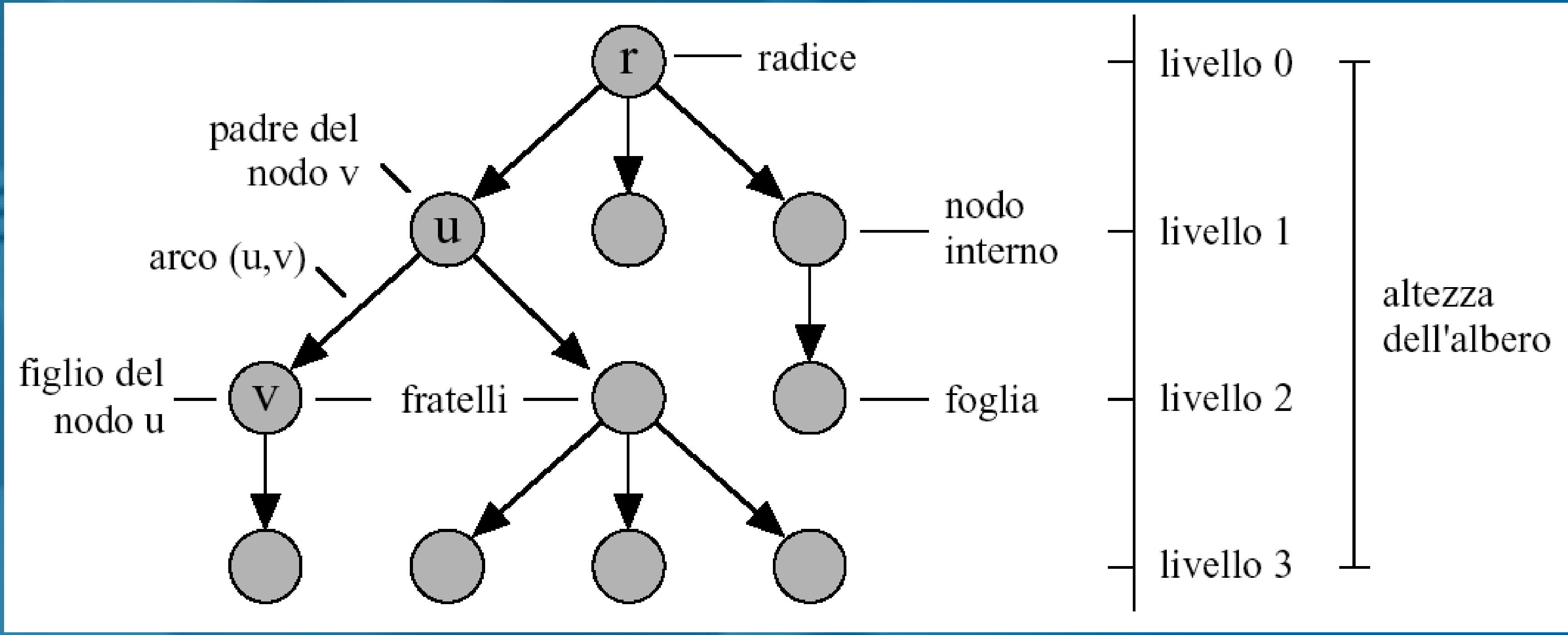
Punto della situazione

- Problema dell'ordinamento:
  - Lower bound – Ω(n log n)   Albero di decisione
  - Upper bound – O(n log n)   Mergesort (non *in loco* e complessità Θ(n log n))
  - Algoritmi quadratici: Insertion, Selection (*in loco*)
- Proviamo a costruire un nuovo algoritmo ottimo, che ordini *in loco* e che costi O(n log n)

HeapSort

- Stesso approccio incrementale (invertito) del SelectionSort
  - seleziona gli elementi dal più grande al più piccolo…
  - … ma usa una struttura dati efficiente (**heap binario**), per cui l’estrazione del prossimo elemento massimo avviene in tempo O(log n), invece che O(n)
- Struttura dati (efficiente)
  - Organizzazione specifica (e memorizzazione) di una collezione di dati che consente di supportare le operazioni previste su di essi usando meno risorse di calcolo possibile
- **Obiettivo**: progettare una struttura dati H su cui eseguire efficientemente le seguenti operazioni:
  - dato un array A, genera H
  - estrai il più grande elemento da H
  - ripristina l’organizzazione specifica dei dati in H (ovvero mantieni invariate le proprietà strutturali di H)

Alberi: qualche richiamo



albero d-ario: albero in cui tutti i nodi interni hanno (al più) d figli

d=2 → albero binario

Un albero d-ario è completo se tutti nodi interni hanno esattamente d figli e le foglie sono tutte allo stesso livello

Heap Binario

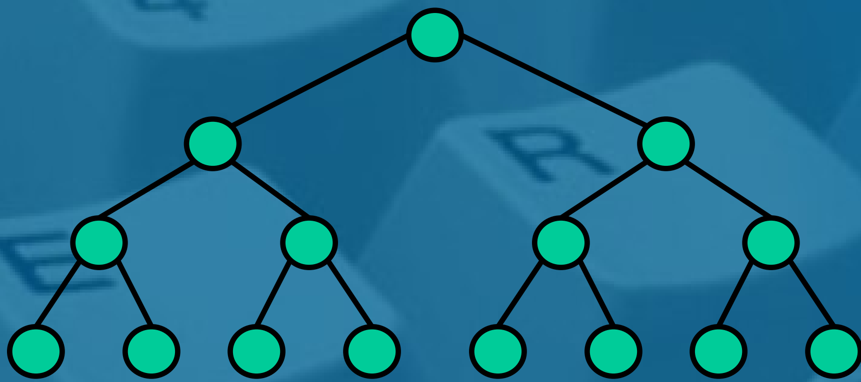
- Struttura dati **heap (catasta) binario** associata ad un insieme totalmente ordinato S: albero binario radicato con le seguenti proprietà:

  1) Quasi completo, ovvero completo fino al penultimo livello, con tutte le foglie sull'ultimo livello 'compattate' a sinistra

  2) gli elementi di S sono memorizzati nei nodi dell'albero (ogni nodo v memorizza uno e un solo elemento di S, denotato con chiave(v)$\in$S)

  3) per ogni nodo v dell'albero diverso dalla radice, chiave(padre(v)) $\geq$ chiave(v) (proprietà di **ordinamento parziale** dell'heap)

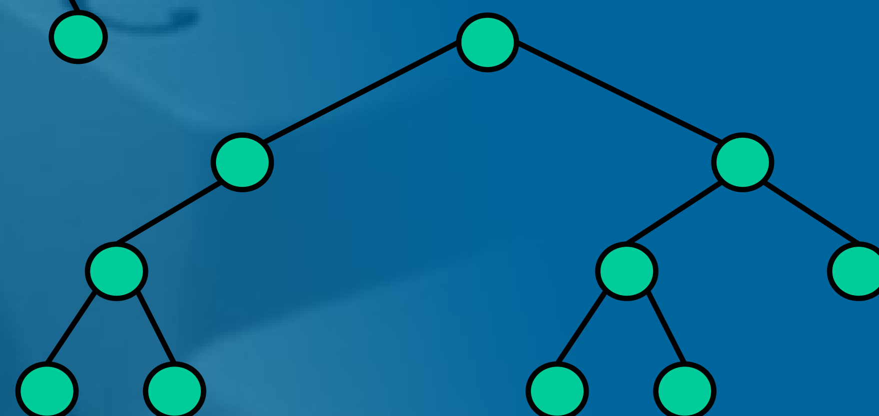
Alcuni esempi di alberi binari…



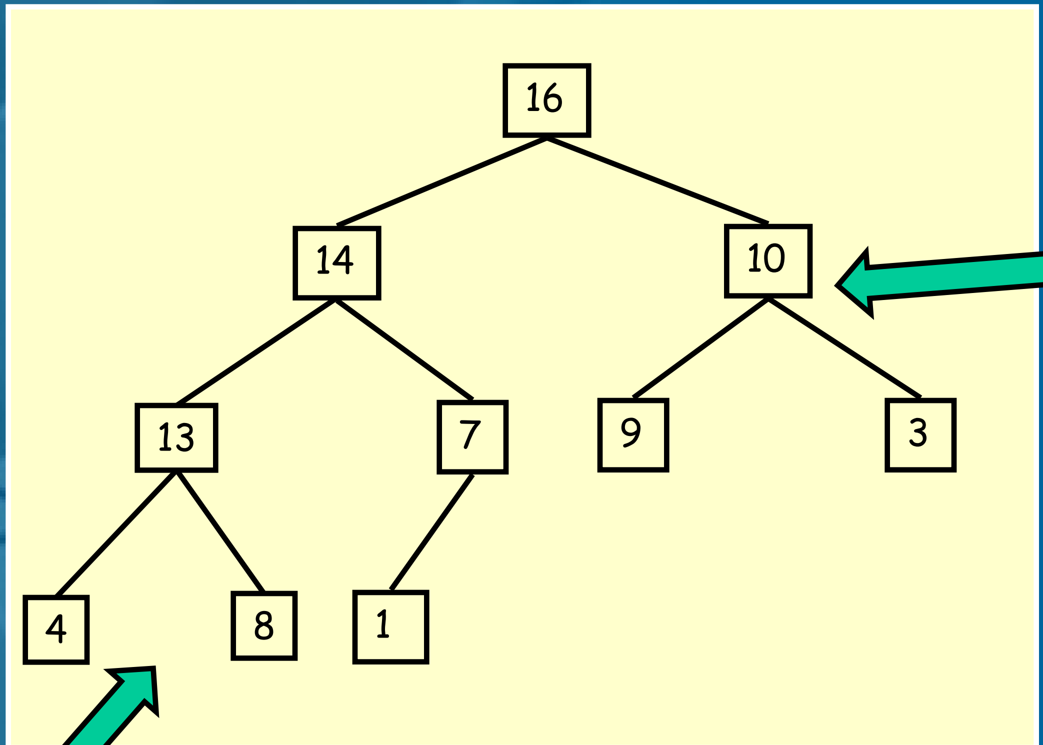
albero binario
completo

albero binario
quasi completo

albero binario
(generico)



…e un esempio di heap binario



In questa direzione **è** presente un ordinamento

Tutti i livelli tranne al più l'ultimo sono completi

Le foglie dell'ultimo livello sono tutte compattate a sinistra dell'albero

In questa direzione **non è** presente un ordinamento

Proprietà salienti degli heap

1) Ogni nodo interno contiene un valore maggiore o uguale del valore contenuto in tutti i suoi discendenti (deriva banalmente dalla proprietà di ordinamento parziale)

$\Rightarrow$ L'elemento massimo è contenuto nella radice

2) L'albero binario associato ad un heap di n elementi ha altezza $\Theta(\log n)$

Osservazione

- La struttura dati presentata è più propriamente denominata max-heap, per via del fatto che il massimo è contenuto nella radice
- In alcuni contesti che vedremo più avanti (ad esempio, algoritmi su grafi), avrà più senso definire la struttura duale min-heap, in cui la relazione di ordine parziale diventa:

chiave(padre(v)) ≤ chiave(v) per ogni nodo v

e conseguentemente la radice conterrà il minimo.

Altezza logaritmica di un heap binario

- Abbiamo già dimostrato (vedi LB per il problema dell'ordinamento) che un albero binario con k foglie in cui ogni nodo interno ha (al più) due figli, ha altezza $h(k) \geq \log k$.
- Adesso vogliamo dimostrare che un albero binario quasi completo di n nodi, ha altezza $h := h(n) = \Theta(\log n)$
- Ma se l'albero fosse completo di altezza h:

$$n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{h-1} + 2^h =$$

(somma parziale h-esima della serie geometrica di ragione 2)

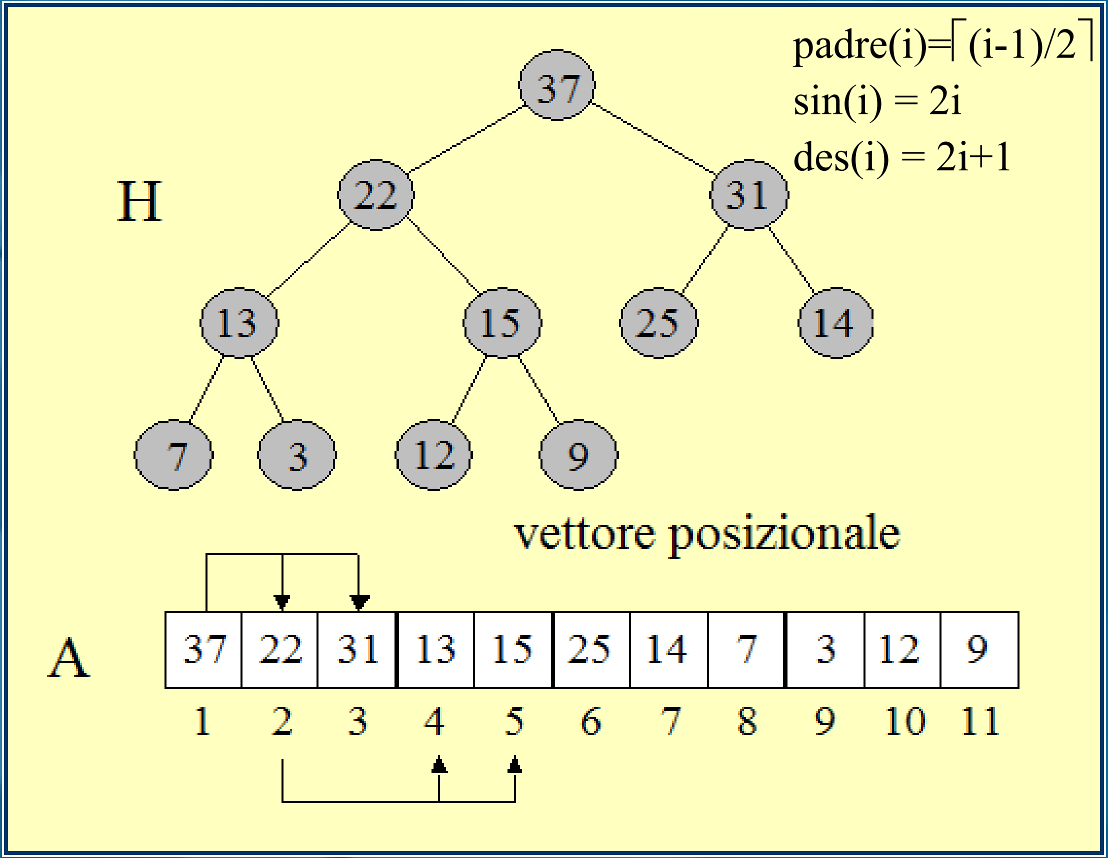
$$= (2^{h+1}-1)/(2-1) = 2^{h+1}-1$$

e quindi se fosse completo di altezza h-1 avremmo $n = 2^h-1$

$\Rightarrow$ Quindi, se l'albero binario è quasi completo e ha altezza h:

$$2^h - 1 < n \leq 2^{h+1} - 1 \quad \Rightarrow \quad h = \lfloor \log n \rfloor \quad \Rightarrow \quad h = \Theta(\log n)$$

Rappresentazione con array posizionale



Se l'heap inizialmente contiene n elementi, è sufficiente allocare un vettore di dimensione n. In seguito, alcune celle dell'array potrebbero rimanere vuote, perché potremmo cancellare elementi dall'heap attraverso l'operazione di estrazione del massimo

⇒ nello pseudocodice il numero di elementi correntemente nell'heap H rappresentato mediante l'array posizionale A sarà indicato con heapsize[A] (può quindi essere minore della dimensione dell'array), la cosiddetta dimensione logica dell'array

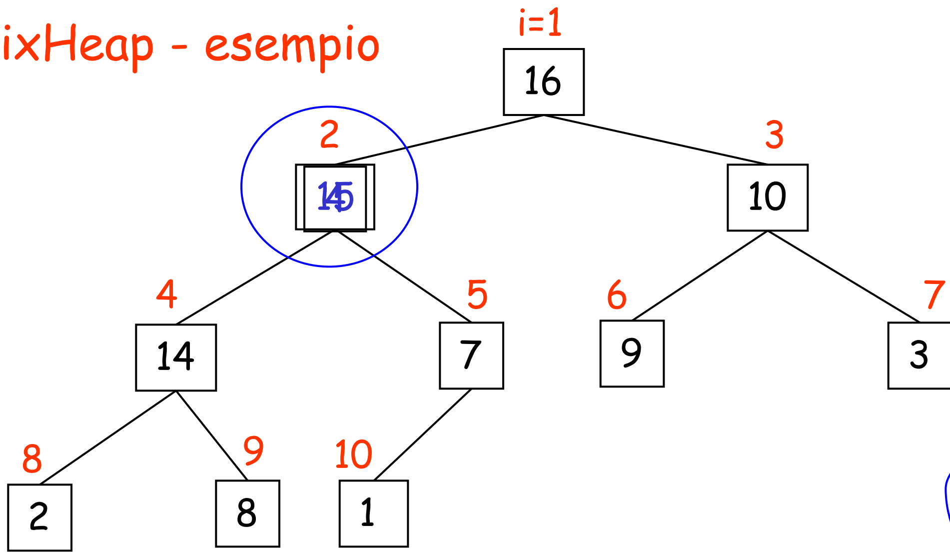
La procedura fixHeap

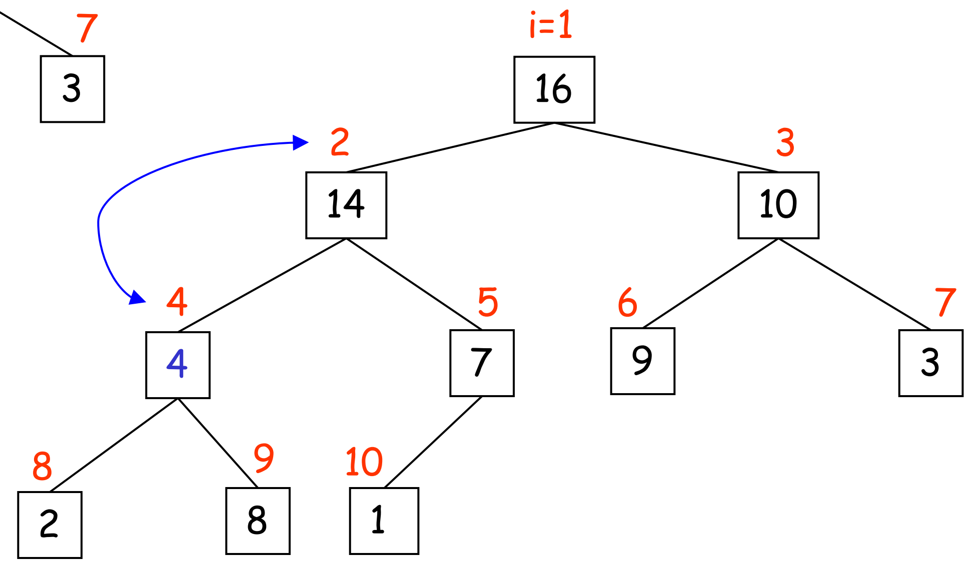
Sia H un max-heap dato in forma di albero binario. Supponiamo che la chiave di un certo nodo v di H venga decrementata. In tal caso, potrebbe essere violata la proprietà di ordinamento parziale di H (ovvero, la chiave di v potrebbe essere diventata MINORE di quella di almeno uno dei figli). Allora, possiamo riaggiustare l'heap come segue:

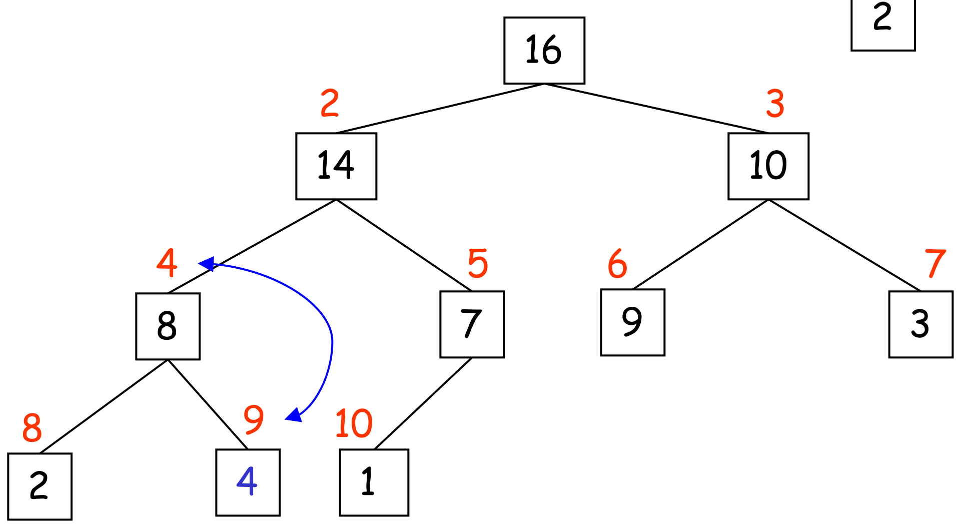
```
fixHeap(nodo v, heap binario H)
1.    if (v è una foglia) then return
2.    else
3.          sia u il figlio di v con chiave massima
4.          if (chiave(v)<chiave(u)) then
5.             scambia chiave(v) e chiave(u)
6.             fixHeap(u,H)
```

Tempo di esecuzione: $O(h)=O(\log n)$

fixHeap - esempio







Pseudocodice di fixHeap per l’array posizionale

```
fixHeap-posizionale (i, array A)
    s=sin(i)
    d=des(i)
    if (s ≤ heapsize[A] e A[s] >A[i])
        then massimo=s
        else massimo=i
    if (d ≤ heapsize[A] e A[d] >A[massimo])
        then massimo=d
    if (massimo≠i)
        then scambia A[i] e A[massimo]
            fixHeap-posizionale(massimo,A)
```

Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

Costruzione dell’heap

Osservazione: fixHeap opera solo sul sottoalbero radicato nel nodo su cui viene chiamata, ed assume ovviamente che i due sottoalberi radicati in tale nodo soddisfino invece la proprietà di ordinamento parziale (cioè, siano a loro volta degli heap)

⇒ posso pensare di costruire un heap applicando ricorsivamente in modo bottom-up la procedura di fixHeap!

Heapify: Algoritmo ricorsivo basato sul *divide et impera* per la costruzione dell’heap H in forma di albero binario.

```
heapify(albero binario quasi completo H)
    if (H è vuoto) then return
    else
        heapify(sottoalbero sinistro di H)
        heapify(sottoalbero destro di H)
        fixHeap(radice di H, H)
```

```
heapify-posizionale(array A)
n ← lunghezza di A
i=⌈n/2⌉
if (n=0) then return else
    heapify-posizionale(A[1,i-1])
    heapify-posizionale(A[i,n])
    fixHeap-posizionale(i,A)
```

Versione iterativa di heapify con array posizionale

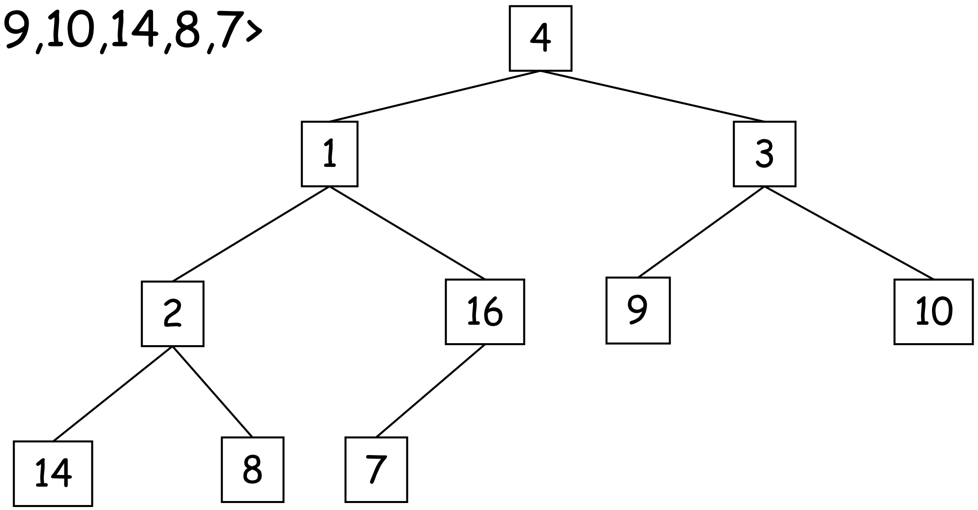
heapify-posizionale-iterativo(array A)

1. Heapsize[A]=n
2. **for** i=$\lfloor n/2 \rfloor$ **down to** 1 **do**
3. **fixHeap-posizionale**(i, A)

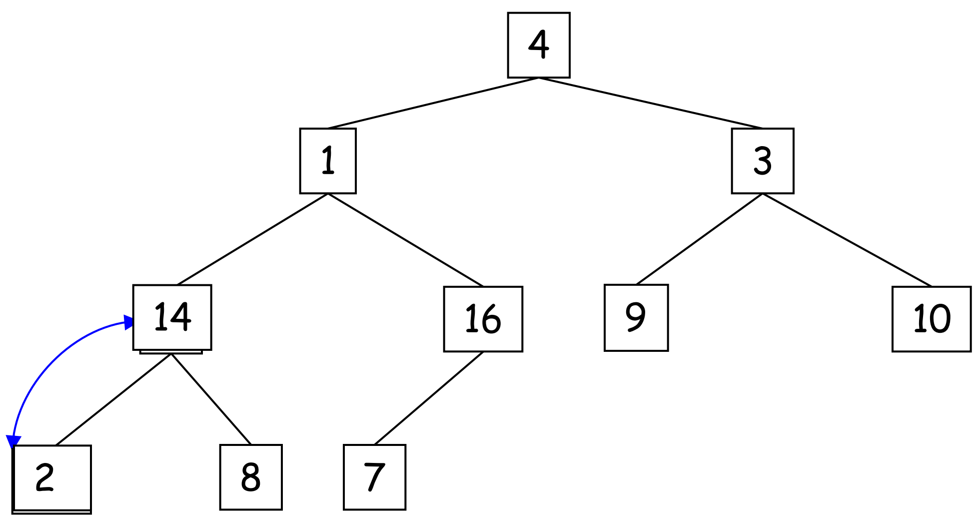
Nota: gli elementi A[$\lfloor n/2 \rfloor$+1],…,A[n] sono foglie dell'albero

Esempio

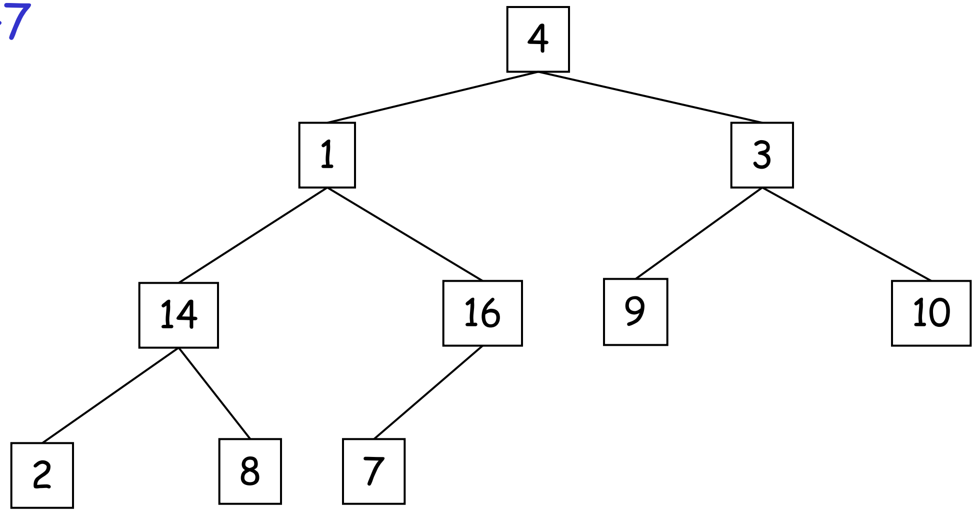
Input: H=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>



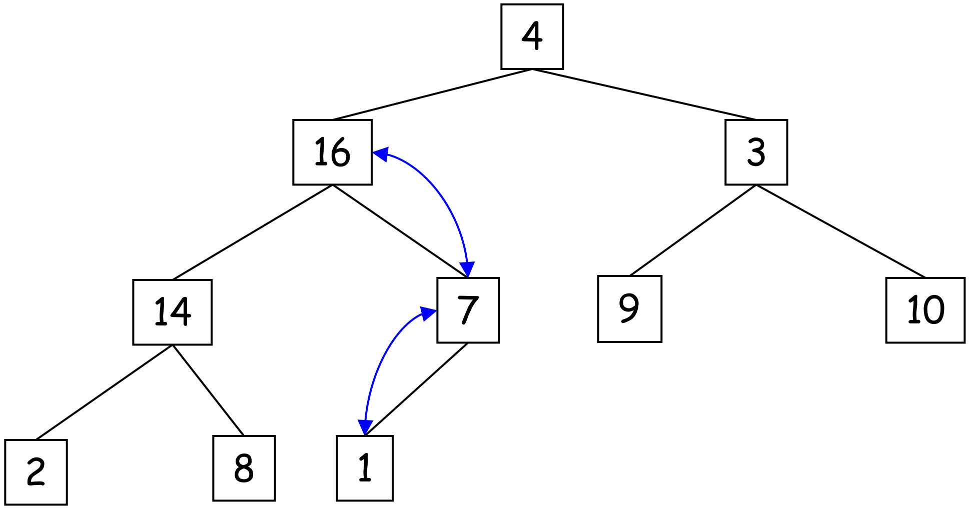
Procedendo bottom-up arrivo fino alle foglie 14 e 8, sulle quali non faccio nulla, e poi applico la fixHeap al nodo 2, che viene scambiato col 14, perché 2<14



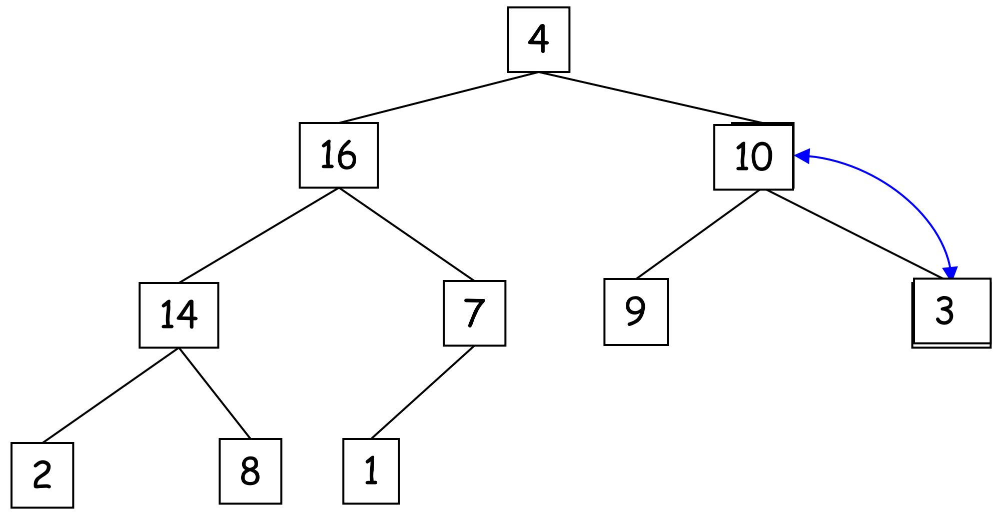
Quindi passo alla foglia 7 e poi al nodo 16, sul quale la fixHeap non fa nulla perché 16>7



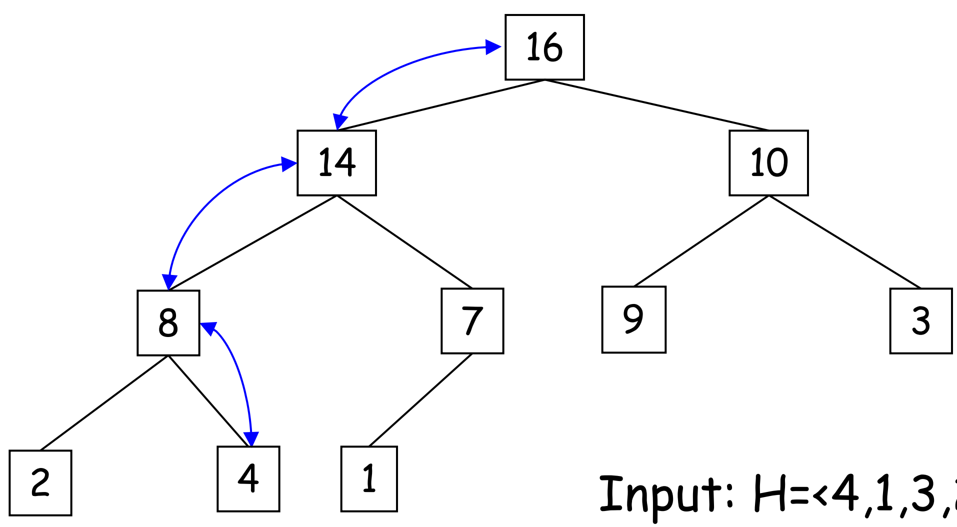
Passo quindi al nodo 1, e la fixHeap lo fa ridiscendere come in figura



Passo quindi alle foglie 9 e 10, e poi al nodo 3 che nella fixHeap viene scambiato col 10



Infine passo al nodo 4, e la fixHeap lo fa ridiscendere come in figura



E' un **heap**!

Input: H=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>

Heapify(H) → H =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

Complessità heapify

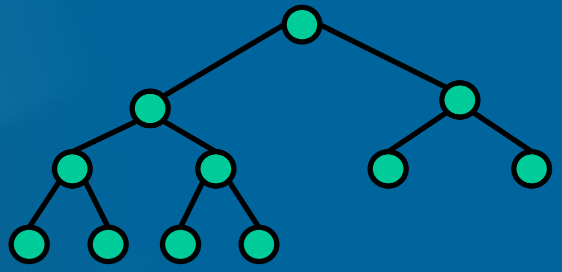
Ci concentriamo sulla versione ricorsiva non posizionale (le altre versioni sono analoghe); per semplificare l'analisi, completiamo l'albero binario aggiungendo le foglie mancanti. In questo modo avremo un totale di n' nodi, con ovviamente $n' = \Theta(n)$

Tempo di esecuzione: $T(n') = 2T(n'/2)+O(\log n')$

$T(n')=\Theta(n')=\Theta(n)$ (caso 1 del Teorema Master: $a=b=2$, e $f(n)\equiv O(\log n)=O(n^{\log_2 2-\varepsilon})$ per $\varepsilon>0$, quindi $T(n)=\Theta(n^{\log_2 2})= \Theta(n)$)

Domanda: Analizzando la procedura heapify senza l'ipotesi di cui sopra, quale problema sorge?

Risposta: sorge il problema che una delle due sottosequenze potrebbe in realtà contenere più di n/2 elementi, e quindi non posso impostare la relazione di ricorrenza nella forma del teorema master



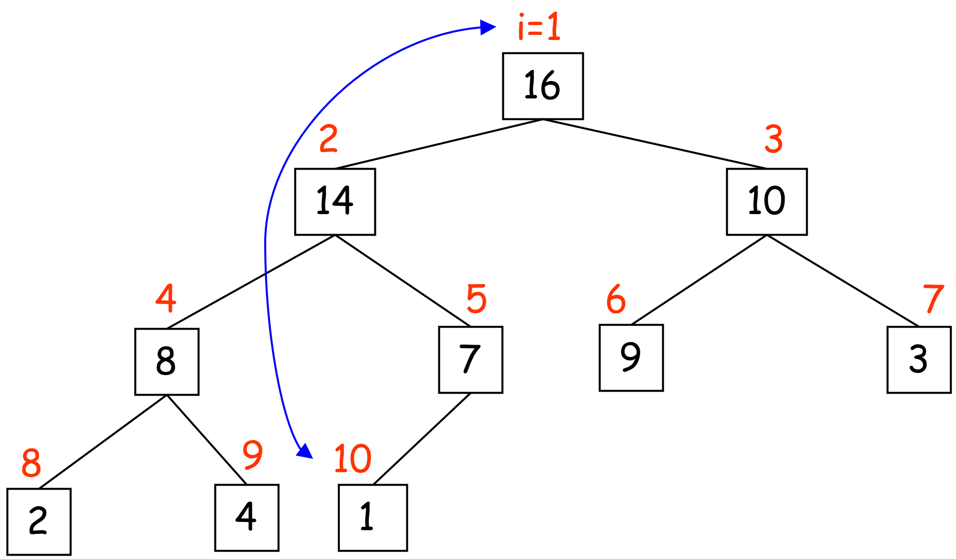
l'heap contiene 11 elementi, ma il sottoalbero sinistro della radice contiene 7>11/2 elementi!

Estrazione del massimo

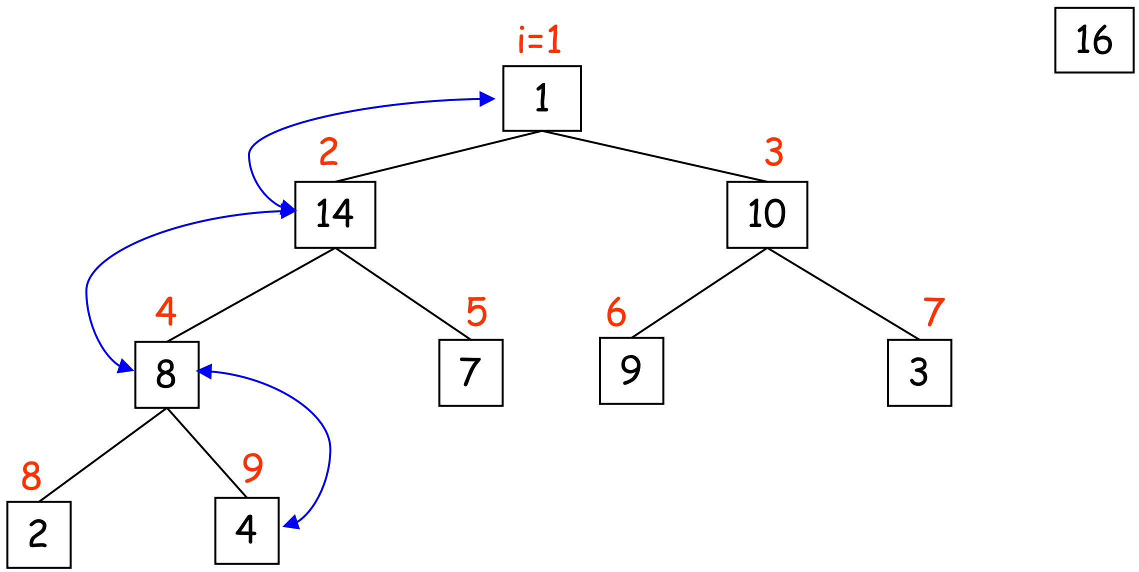
- Leggi e memorizza la chiave contenuta nella radice
- Copia nella radice la chiave contenuta nella foglia più a destra dell’ultimo livello
  - nota: nella rappresentazione posizionale, è l’elemento in posizione heapsize[A]
- Rimuovi la foglia e diminuisci di 1 la dimensione dell’heap
- Ripristina la proprietà di ordinamento a heap richiamando fixHeap sulla radice

Tempo di esecuzione: O(log n) (n è la dimensione corrente dell’heap)

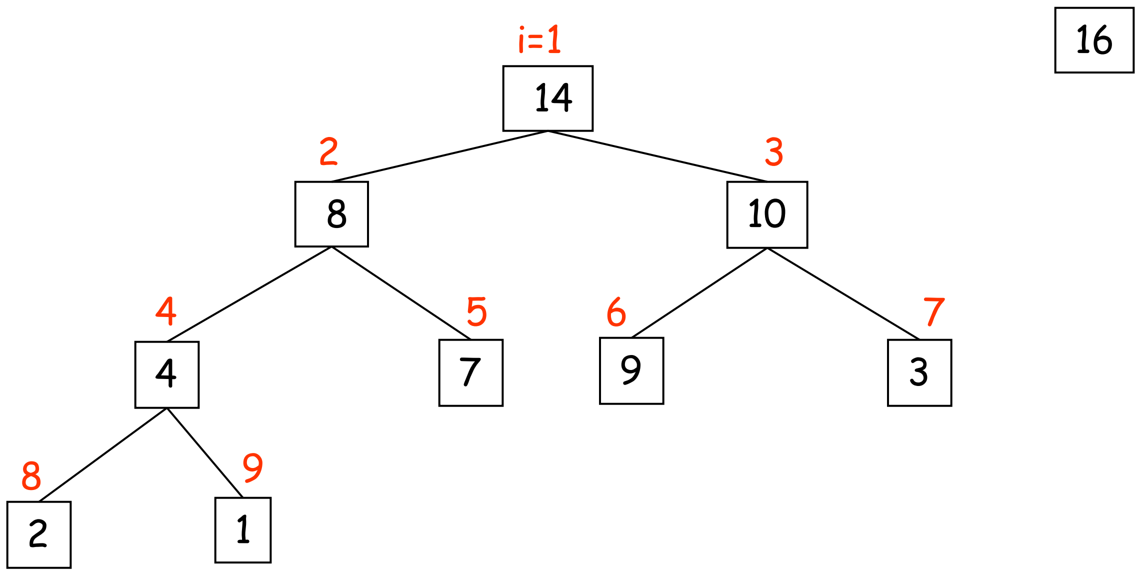
Estrazione del massimo



Estrazione del massimo



Estrazione del massimo



L'algoritmo HeapSort

- Costruisce un heap (in forma di array posizionale) tramite heapify
- Estrae ripetutamente il massimo per n-1 volte (ad ogni estrazione memorizza il massimo nella posizione dell'array che si è appena liberata)

```
HeapSort (array A)
    heapify-posizionale(A)
    heapsize[A]=n
    for i=n down to 2 do
        scambia A[1] e A[i]
        heapsize[A] = heapsize[A] -1
        fixHeap-posizionale(1, A)
```

$\Theta(n)$

+

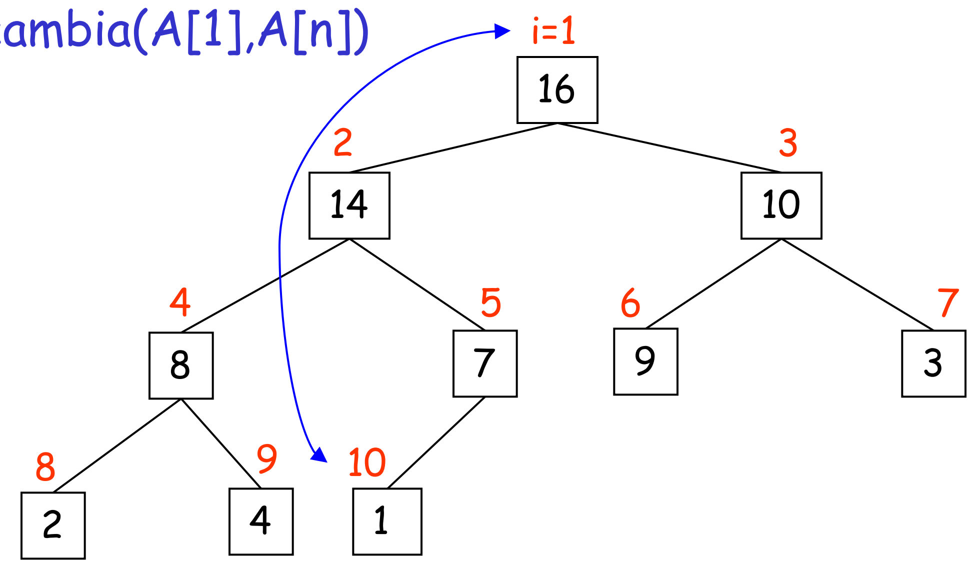
n-1 estrazioni di costo O(log n)

⇨ ordina *in loco* in tempo O(n log n)

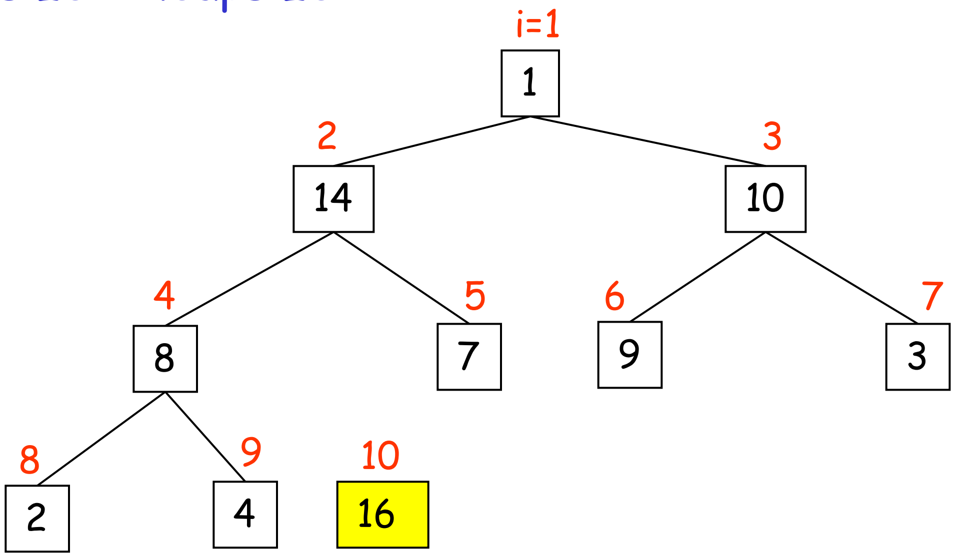
Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

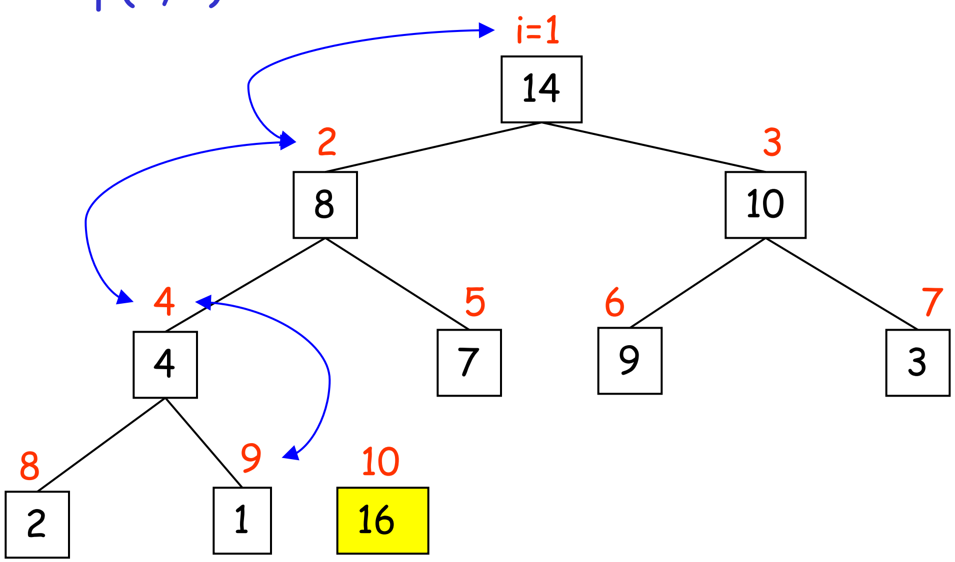
Scambia(A[1],A[n])



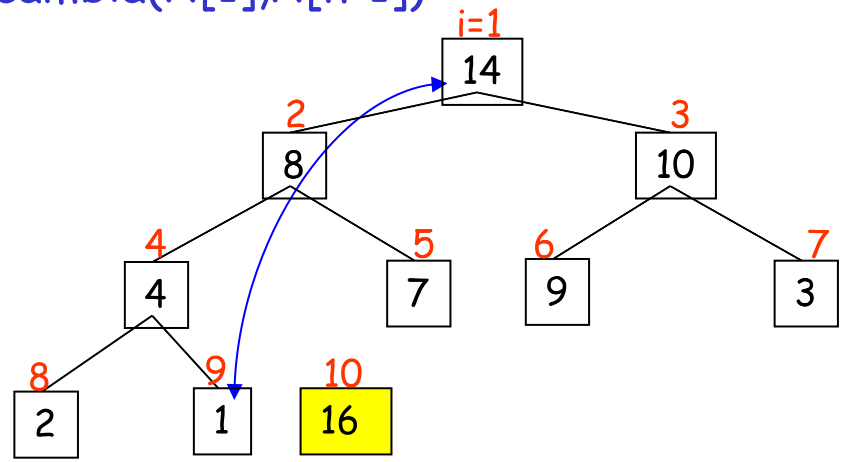
heapsize = heapsize -1



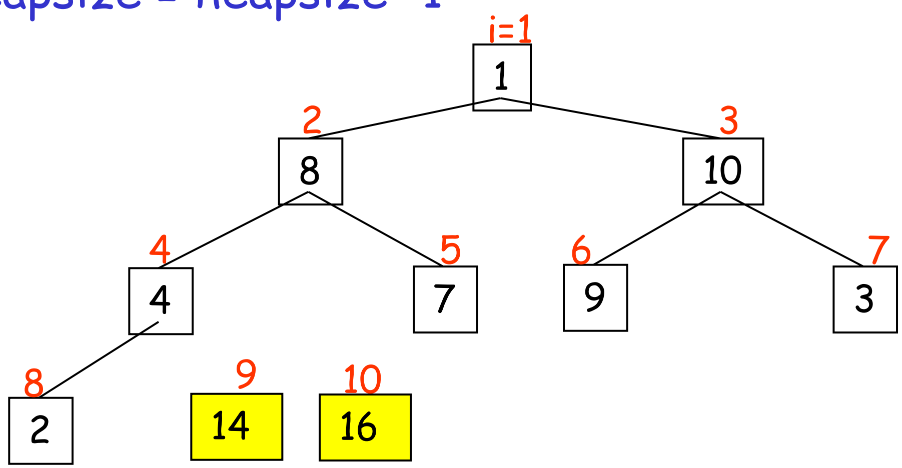
fixHeap(1,A)



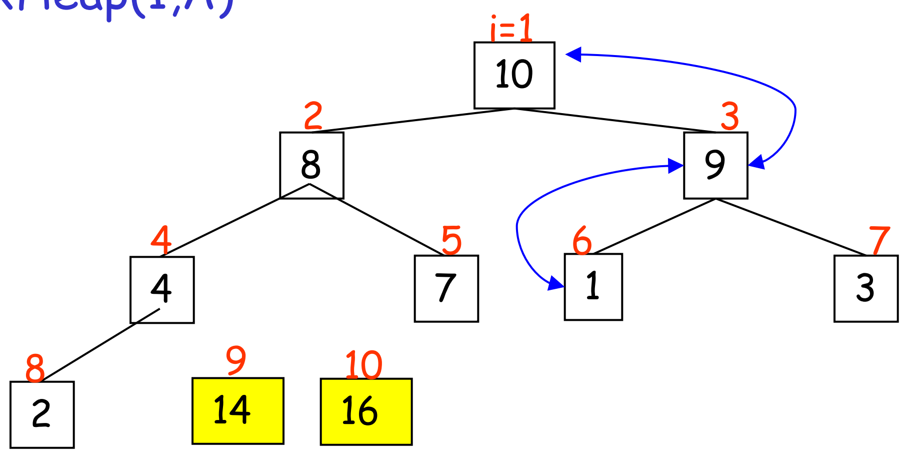
Scambia(A[1],A[n-1])



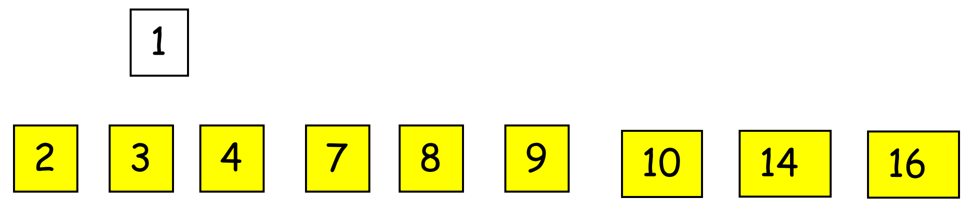
heapsize = heapsize -1



fixHeap(1,A)



E così via, sino ad arrivare a



Esercizio: È possibile definire un'istanza di input su cui l'HeapSort costa o(n log n)?

Risposta: NO (se gli elementi sono distinti): Si può dimostrare che nel caso migliore l'HeapSort richiede circa $\frac{1}{2}$ n log n operazioni ☹ $\Rightarrow$ l'HeapSort costa Θ(n log n)