Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 2
Modelli di calcolo e notazione asintotica

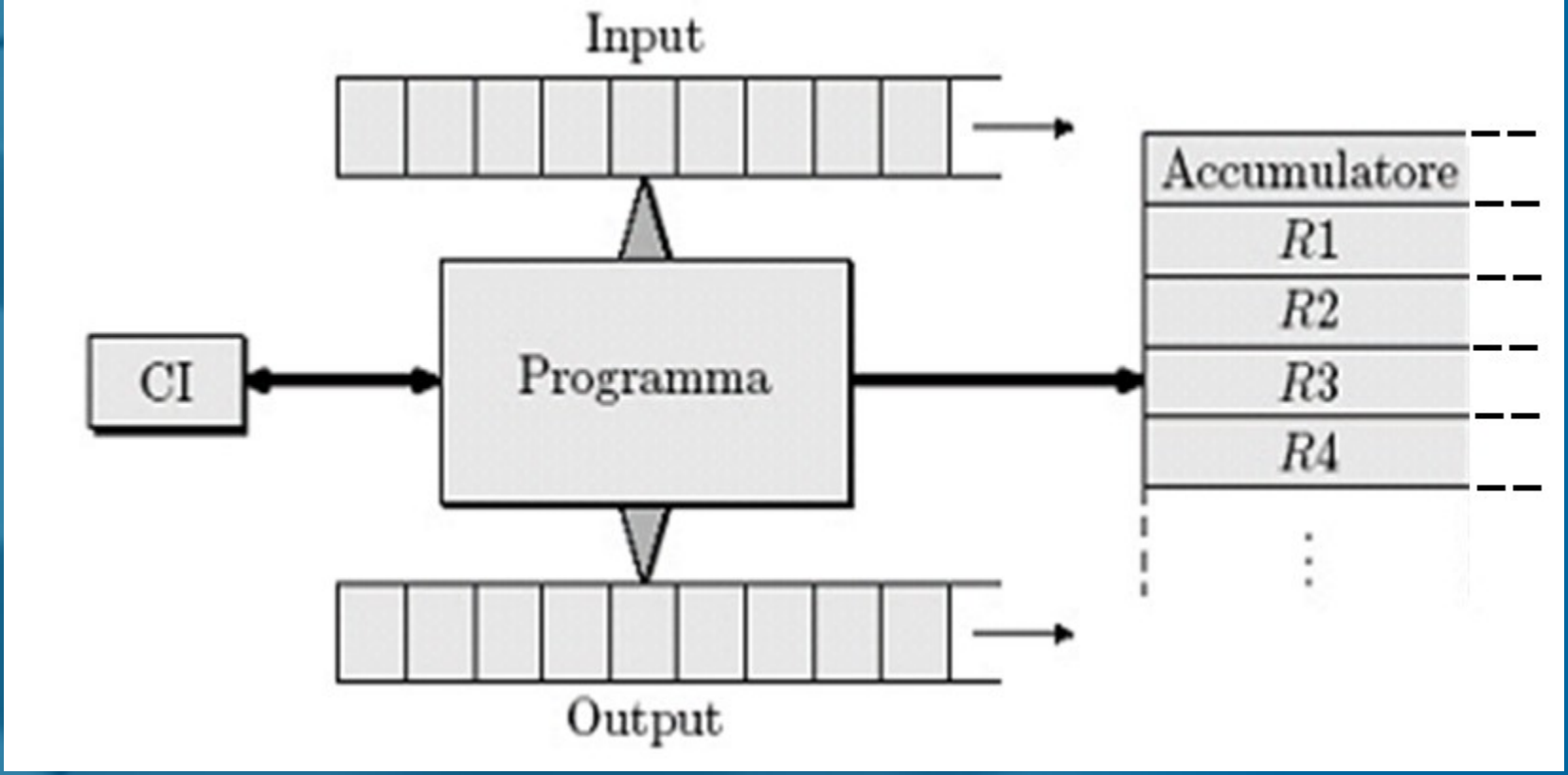
Modello di calcolo

- Per valutare la complessità temporale dei vari algoritmi `Fibonacci`, abbiamo pedissequamente contato le linee di pseudocodice di volta in volta mandate in esecuzione
- Tuttavia, contare il numero di linee dello pseudocodice di un algoritmo non è sufficiente a comprenderne la complessità temporale: quali operazioni reali si celano dietro lo pseudocodice???
- Anche l'analisi dello spazio utilizzato è stata piuttosto arbitraria: ho ipotizzato che le celle di memoria utilizzate avessero capacità infinita!
- Per valutare la complessità di un algoritmo in modo oggettivo, bisogna quindi stabilire un modello di calcolo di riferimento su cui esso viene eseguito, ovvero una macchina astratta sulla quale si definisce a priori l'insieme delle operazioni ammissibili ed eseguibili durante una computazione, specificandone i relativi costi (in termini di tempo e spazio utilizzato)
- Alcuni modelli di calcolo famosi: Macchina di Turing, Automi a Stati Finiti, Funzioni Ricorsive, Macchina a Registri, etc… (sono tutti modelli di calcolo equivalenti, cioè in grado di calcolare le stesse funzioni)

Il nostro modello di calcolo: la RAM

- La RAM (*Random Access Machine*) è un tipo particolare di macchina a registri (locazioni di memoria ad accesso diretto)
- La RAM è definita da:
  - un nastro di ingresso e uno di uscita, ove saranno scritti l'input e l'output, rispettivamente
  - una memoria ad accesso diretto strutturata come un array (di dimensione infinita) in cui ogni cella può contenere un valore intero arbitrariamente grande
  - un programma finito di istruzioni elementari
  - un registro detto accumulatore (contiene gli operandi dell'istruzione corrente)
  - un registro detto contatore delle istruzioni (contiene l'indirizzo dell'istruzione successiva)
- La RAM è un'astrazione dell'architettura di von Neumann

La RAM



Criterio di costo unitario

- Nel modello RAM a costi uniformemente unitari, le seguenti istruzioni elementari hanno un costo unitario
  - istruzione ingresso/uscita (lettura /scrittura del nastro di input/output)
  - operazione aritmetico (+,-, , , elevamento a potenza, etc.) /logica (test)
  - accesso/modifica del contenuto della memoria
- **Complessità temporale** tempo(I) misurata come numero di istruzioni elementari eseguite sull'istanza di input I
- **Complessità spaziale** spazio(I) misurata come numero massimo di celle di memoria della RAM occupate durante l'esecuzione sull'istanza di input I

Dimensione dell'input

- Misureremo le risorse di calcolo usate da un algoritmo (tempo di esecuzione / occupazione di memoria) in funzione della dimensione dell'istanza I in input
- Esistono due modalità di caratterizzazione della dimensione dell'input:
  - Quantità di memoria effettiva utilizzata per codificare l'input (ad esempio, numero di bit necessari per rappresentare un valore in input, come nel problema di Fibonacci)
  - Parametrizzazione della dimensione dell'input (ad esempio, numero di elementi di una sequenza da ordinare)
- In tutti i problemi che incontreremo in futuro, la dimensione dell'input sarà parametrizzata attraverso il numero n di elementi dell'istanza

Notazione asintotica

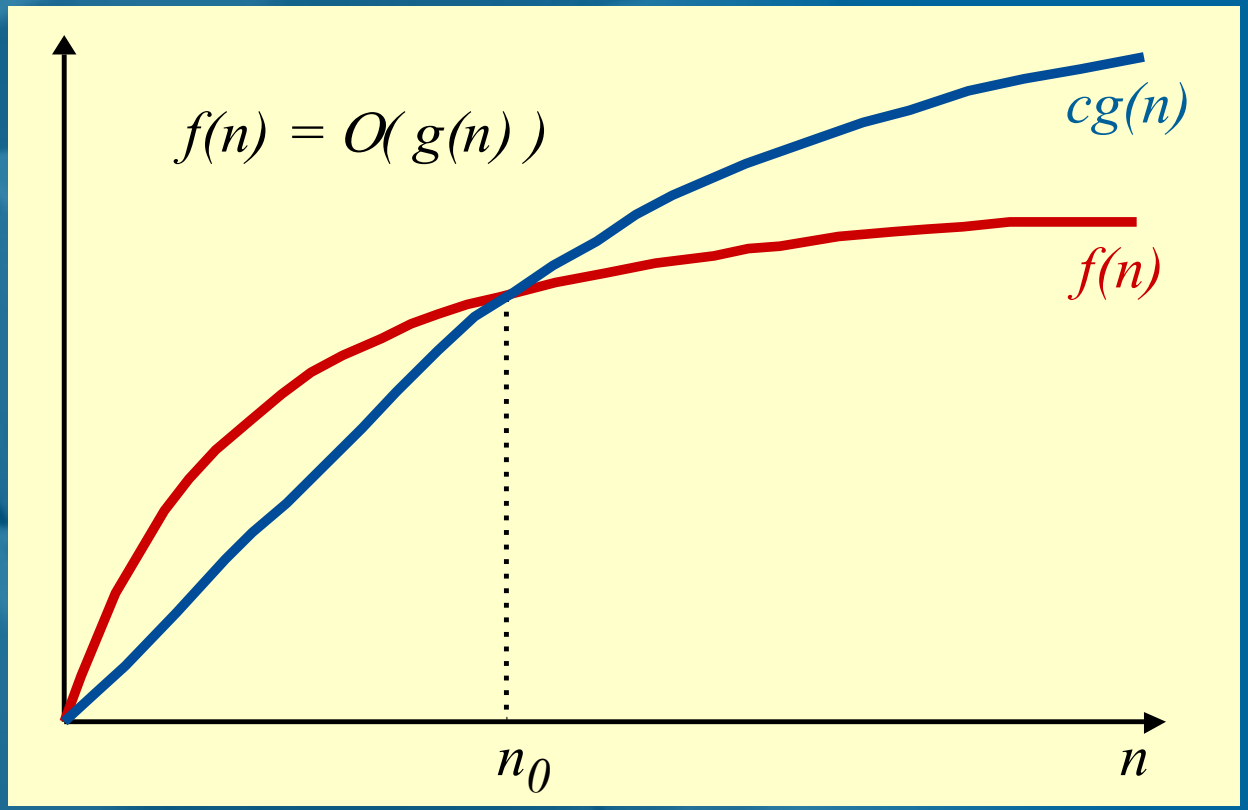
Notazione asintotica e operazioni dominanti

- Complessità temporale e spaziale saranno espresse in notazione asintotica rispetto alla dimensione dell'input
- La notazione asintotica è un'astrazione utile per descrivere l'ordine di grandezza di una funzione ignorando i dettagli non influenti, come costanti moltiplicative e termini di ordine inferiore
- **Semplificazione:** Utilizzando l'analisi asintotica, non dovremo andare a conteggiare tutte le operazioni eseguite, ma sarà sufficiente considerare le cosiddette operazioni dominanti, ovvero quelle che nel caso peggiore vengono eseguite più spesso; queste si trovano annidate nei cicli più interni dello pseudocodice che descrive l'algoritmo
- NOTA: Nel prosieguo, ci concentreremo su funzioni di variabile intera non negativa a valori reali non negativi

$$f : n \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0$$

Notazione asintotica O ('o' grande)

$f(n) = O(g(n))$ se due costanti $c>0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $f(n) \leq c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



Legame con il concetto di limite

- Se g(n) è definitivamente diversa da 0 per n $\to \infty$ (praticamente, tutti i casi di nostro interesse), avremo che

$$f(n) = O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

ovvero f(n)=O(g(n)) se e solo se f(n) è un infinito di ordine non superiore a g(n)

- Ulteriore semplificazione: tutte le funzioni che studieremo avranno un andamento 'regolare' al crescere di n, e quindi potremo stabilire che $f(n) = O(g(n))$ semplicemente verificando che $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = k < \infty$

Un caso notevole: i polinomi

Sia $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0$ un polinomio di grado d (con $a_d>0$); dimostriamo che $f(n)=O(n^d)$

Se scegliamo $c = a_d + |a_{d-1}| + \ldots + |a_0|$

$c n^d = a_d n^d + |a_{d-1}| n^d + \ldots + |a_0| n^d \geq$ (divido i vari n^d)

$a_d n^d + |a_{d-1}| n^{d-1} + \ldots + |a_0| \geq$ (sfrutto $|x| \geq x$)

$a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0 = f(n)$

$f(n) \leq c n^d \quad \forall n \geq 0$, e quindi posso scegliere $n_0=0$

Alternativamente (e più semplicemente):

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_d n^d + \ldots + a_0}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_d n^d + \ldots + a_0}{n^d} = a_d < \infty \Rightarrow f(n) = O(g(n))$$

Esempi

- Sia $f(n) = 2n^2 - 3n$; applichiamo la dimostrazione appena fatta per mostrare che $f(n)=O(n^2)$:

  scegliendo $c = a_2 + |a_1| + |a_0| = 2+3+0=5$

  avremo che $2n^2 - 3n \leq 5n^2$ per ogni $n \geq n_0=0$.
- Alternativamente, in modo più semplice:

  $\lim_{n \to \infty} (2n^2 - 3n)/n^2 = 2 < \infty \Rightarrow 2n^2 - 3n = O(n^2)$
- Più in generale, $2n^2 - 3n = O(n^d)$ $\forall d \geq 2$, in quanto in tal caso

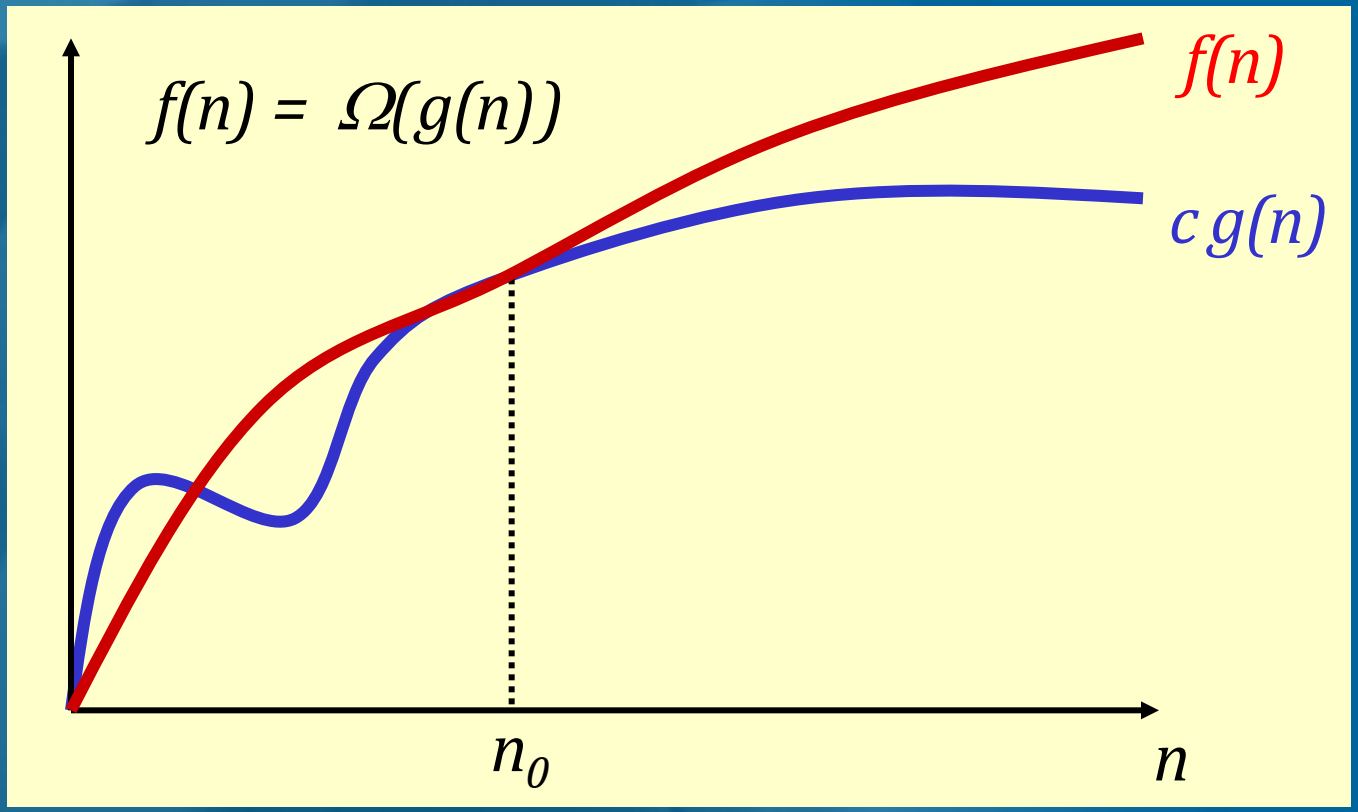
  $\lim_{n \to \infty} (2n^2 - 3n)/n^d < \infty$
- $2n^2 - 3n = O(a^n)$ $\forall a > 1$, in quanto $\lim_{n \to \infty} (2n^2 - 3n)/a^n = 0 < \infty$
- Invece, $2n^2 - 3n \neq O(n)$, poiché $\lim_{n \to \infty} (2n^2 - 3n)/n = \infty$

Osservazioni sulla notazione O

- Si noti che $O(g(n))$ è un insieme di funzioni, ovvero è (informalmente) l'insieme di funzioni che crescono al più come $g(n)$
- Ad esempio, $O(n^2)$ contiene tutti i polinomi di primo e secondo grado, nonché tutte le funzioni che crescono al più come n^2, come ad esempio $f(n) = 51$, oppure $f(n) = n \log^5 n$, oppure ancora $f(n) = n\sqrt{n}$
- Sarebbe quindi più opportuno scrivere che, ad esempio, $2n^2-3n \in O(n^2)$, ma con un piccolo abuso di notazione scriveremo sempre $2n^2-3n = O(n^2)$
- Una particolare classe asintotica è quella che denoteremo con $O(1)$: questa contiene tutte le funzioni che crescono al più come una costante, quindi ad esempio $f(n) = 51$, oppure $f(n) = 10^{11234}$, ma anche, ad esempio, $f(n) = 1/n$

Notazione asintotica Ω (omega grande)

$f(n) = \Omega(g(n))$ se due costanti $c>0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $f(n) \geq c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



Legame con il concetto di limite

- Se g(n) è definitivamente diversa da 0 per n $\to \infty$ (praticamente, tutti i casi di nostro interesse), avremo che

$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$$

ovvero $f(n)=\Omega(g(n))$ se e solo se $f(n)$ è un infinito di ordine non inferiore a $g(n)$

- Ulteriore semplificazione: tutte le funzioni che studieremo avranno un andamento 'regolare' al crescere di n, e quindi potremo stabilire che $f(n) = \Omega(g(n))$ semplicemente verificando che $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = k > 0$

Un caso notevole: i polinomi

Sia $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0$ un polinomio di grado d (con $a_d>0$); dimostriamo che $f(n)=\Omega(n^d)$

Infatti: $f(n)/n^d = a_d + a_{d-1} n^{-1} + \ldots + a_0 n^{-d}$

$\exists\ n_0: \forall n \geq n_0 \qquad a_d - |a_{d-1}|n^{-1} - \ldots - |a_0| n^{-d} > 0$

Se scegliamo $c = a_d - |a_{d-1}| n_0^{-1} - \ldots - |a_0| n_0^{-d}$

$c n^d = a_d n^d - |a_{d-1}| n^d n_0^{-1} - \ldots - |a_0| n^d n_0^{-d}$

e poiché per $n \geq n_0$ si ha $n^d n_0^{-k} \geq n^d n^{-k} = n^{d-k}$

$c n^d \leq a_d n^d - |a_{d-1}| n^{d-1} - \ldots - |a_0| \leq a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0 = f(n)$

$\forall n \geq n_0 \quad c n^d \leq f(n)$

Alternativamente (e più semplicemente):

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_d n^d + \ldots + a_0}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_d n^d + \ldots + a_0}{n^d} = a_d > 0 \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

Esempi

- Sia $f(n) = 2n^2 - 5n$; applichiamo la dimostrazione appena fatta per mostrare che $f(n) = \Omega(n^2)$:

  $f(n)/n^2 = (2n^2 - 5n)/n^2 = 2 - 5/n$

  ma $2 - 5/n > 0$ per $n \geq 3$ (quindi $n_0=3$);

  Scegliendo $c = a_2 - |a_1|/n_0 - |a_0|/n_0^2 = 2-5/3=1/3$

  avremo che $2n^2 - 5n \geq (1/3)\, n^2$ per $n \geq n_0=3$.

- Alternativamente, in modo più semplice:

  $\lim_{n\to\infty} (2n^2 - 5n)/n^2 = 2 > 0 \Rightarrow 2n^2 - 5n = \Omega(n^2)$

- Più in generale, $2n^2 - 5n = \Omega(n^d)$ per $d \leq 2$, in quanto in tal caso

  $\lim_{n\to\infty} (2n^2 - 5n)/n^{d\leq 2} > 0$

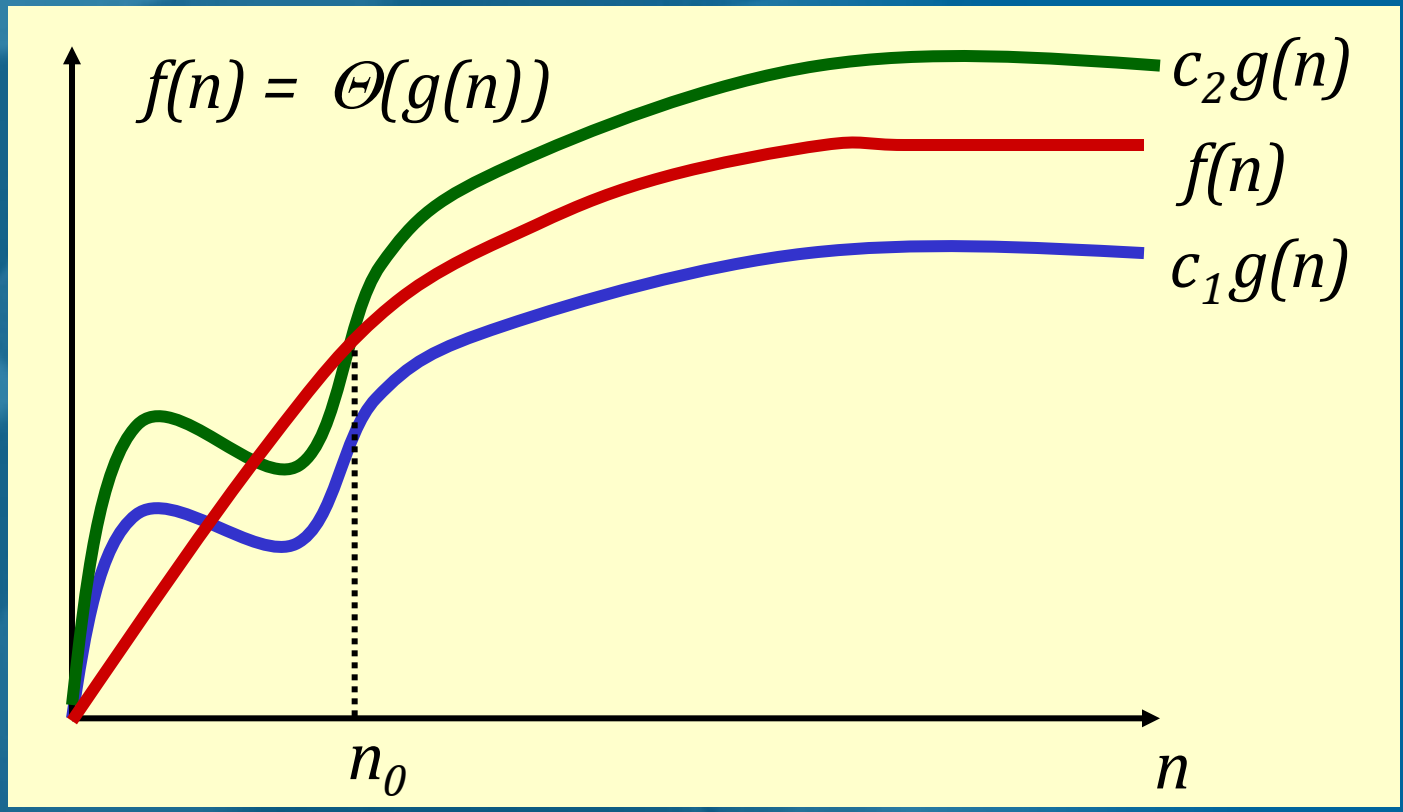
- $2n^2 - 5n = \Omega(\log_a n)$ per $a > 1$, in quanto $\lim_{n\to\infty} (2n^2 - 5n)/\log_a n = \infty$
- Invece, $2n^2 - 5n \neq \Omega(n^d)$ per $d \geq 3$, poiché $\lim_{n\to\infty} (2n^2 - 5n)/n^{d\geq 3} = 0$

Osservazioni sulla notazione Ω

- Al pari di $O(g(n))$, anche $\Omega(g(n))$ è un insieme di funzioni, ovvero è (informalmente) l'insieme di funzioni che crescono almeno come $g(n)$
- Ad esempio, $\Omega(n^2)$ contiene tutti i polinomi di grado almeno pari a 2, nonché tutte le funzioni che crescono almeno come n^2, come ad esempio $f(n) = 3n^3$, oppure $f(n) = n^2 \log^5 n$
- Sarebbe quindi più opportuno scrivere che, ad esempio, $2n^2 - 5n \in \Omega(n^2)$, ma con un piccolo abuso di notazione scriveremo sempre $2n^2-5n = \Omega(n^2)$
- Una particolare classe asintotica è quella che denoteremo con $\Omega(1)$: questa contiene tutte le funzioni che crescono almeno come una costante, quindi ad esempio $f(n) = 51$, oppure $f(n) = 10^{11234}$, ma anche, ad esempio, $f(n) = \log n$

Notazione asintotica Θ (theta grande)

$f(n) = \Theta(g(n))$ se esistono costanti $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



Legame con il concetto di limite

- Se $g(n)$ è definitivamente diversa da 0 per $n \to \infty$ (praticamente, tutti i casi di nostro interesse), avremo che

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow 0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

ovvero $f(n)=\Theta(g(n))$ se e solo se $f(n)$ è un infinito dello stesso ordine di $g(n)$

- Ulteriore semplificazione: tutte le funzioni che studieremo avranno un andamento 'regolare' al crescere di n, e quindi potremo stabilire che $f(n) = \Theta(g(n))$ semplicemente verificando che $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = k$, con $0<k<\infty$
- Ad esempio, $2n^2 + 3n = \Theta(n^2)$, in quanto $\lim_{n\to\infty} (2n^2 + 3n)/n^2 = 2$, che è > 0 e $< \infty$

Osservazioni sulla notazione Θ

- Al pari di $O(g(n))$ e di $\Omega(g(n))$, anche $\Theta(g(n))$ è un insieme di funzioni, ovvero è (informalmente) l'insieme di funzioni che crescono come $g(n)$
- Ad esempio, $\Theta(n^2)$ contiene tutti i polinomi di grado pari a 2, ma anche funzioni del tipo $n^2+\log n/n^2$, oppure $f(n) = n^2-\sqrt{n}$
- Sarebbe quindi più opportuno scrivere che, ad esempio, $2n^2 -5n \in \Theta(n^2)$, ma con un piccolo abuso di notazione scriveremo sempre $2n^2-5n = \Theta(n^2)$
- Una particolare classe asintotica è quella che denoteremo con $\Theta(1)$: questa contiene tutte le funzioni che crescono esattamente come una costante, quindi ad esempio $f(n) = 51$, oppure $f(n) = 10^{11234}$, oppure $f(n) = 32+1/n^2$

Relazioni tra O, Ω e Θ

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$$

$$f(n) = O(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } f(n) = O(g(n))$$

Notazione asintotica o ('o' piccolo)

$f(n) = o(g(n))$ se $\forall c>0$, $\exists n_c \geq 0$ tale che

$f(n) \leq c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_c$

- Se $g(n)$ è definitivamente diversa da 0 per $n \to \infty$ (praticamente, tutti i casi di nostro interesse), avremo che:

$$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

- Notare che $o(g(n)) \subset O(g(n))$
- Ad esempio, $2n^2 - 3n = o(n^d)$ $\forall d \geq 3$, in quanto $\lim_{n\to\infty} (2n^2 + 3n)/n^{d\geq 3} = 0$

Notazione asintotica ω (omega piccolo)

$f(n) = \omega(g(n))$ se $\forall c>0$, $\exists n_c \geq 0$ tale che

$f(n) \geq c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_c$

- Se $g(n)$ è definitivamente diversa da 0 per $n \to \infty$ (praticamente, tutti i casi di nostro interesse), avremo che:

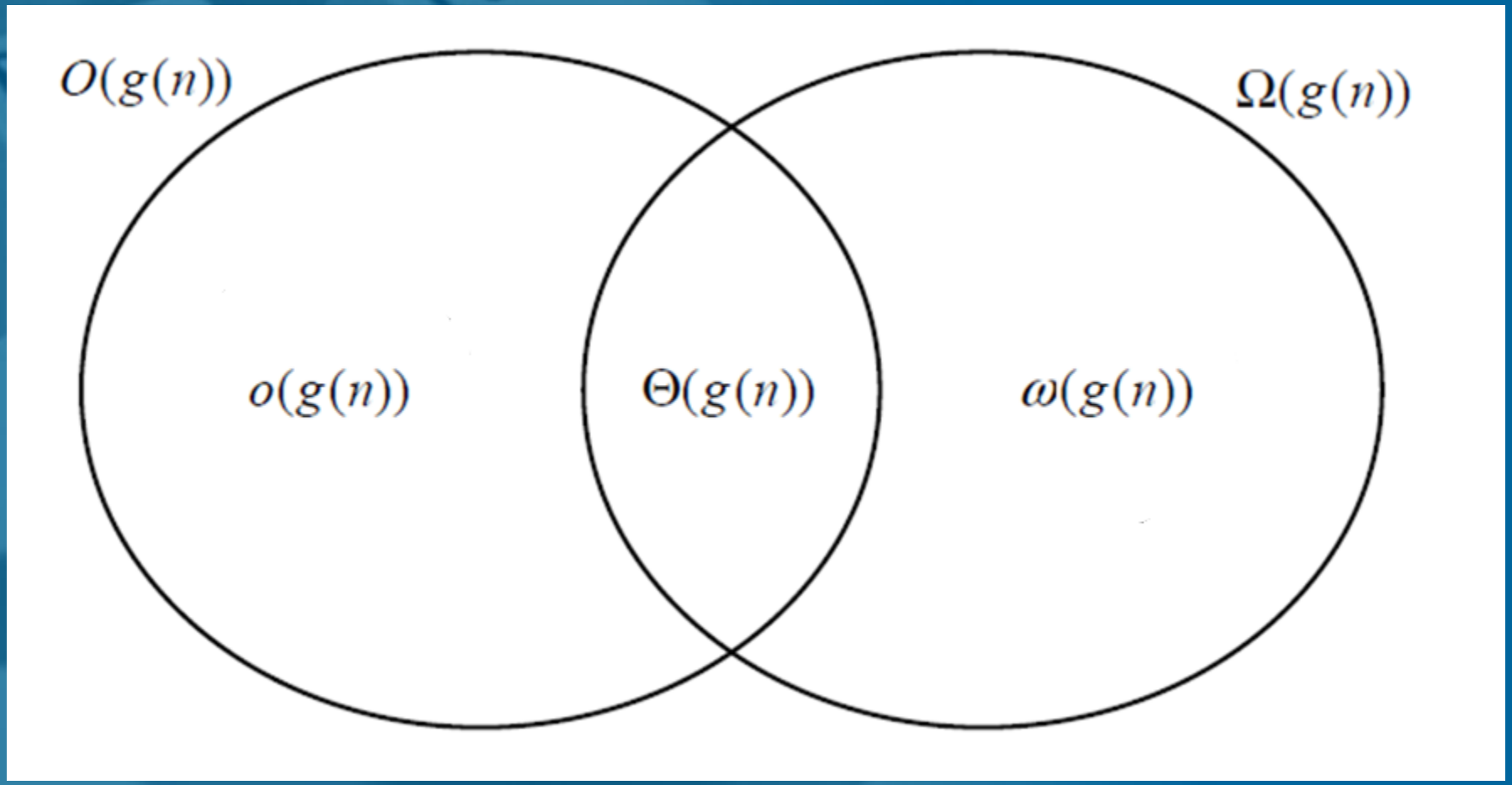
$$f(n) = \omega(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

- Notare che $\omega(g(n)) \subset \Omega(g(n))$
- Ad esempio, $2n^5 + 4n^2 = \omega(n^d)$ $\forall d \leq 4$, in quanto $\lim_{n\to\infty} (2n^5 + 4n^2)/n^{d\leq 4} = \infty$

Analogie

O	Ω	Θ	o	ω
$\leq$	$\geq$	$=$	$<$	$>$

Graficamente



Proprietà della notazione asintotica

Transitività

$f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$

$f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$

$f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$

$f(n) = o(g(n))$ e $g(n) = o(h(n)) \Rightarrow f(n) = o(h(n))$

$f(n) = \omega(g(n))$ e $g(n) = \omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \omega(h(n))$

Riflessività

$f(n) = \Theta(f(n))$

$f(n) = O(f(n))$

$f(n) = \Omega(f(n))$

Simmetria

$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$

Simmetria trasposta

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$

Relazioni asintotiche notevoli

Polinomi

$P(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0$
$a_d > 0$

$P(n) = O(n^d), P(n) = \Omega(n^d) \Rightarrow P(n) = \Theta(n^d)$
$P(n) = O(n^c)\ \forall c \geq d, P(n) \neq O(n^c)\ \forall c < d$
$P(n) = \Omega(n^c)\ \forall c \leq d, P(n) \neq \Omega(n^c)\ \forall c > d$
$P(n) = o(n^c)\ \forall c > d, \quad P(n) = \omega(n^c)\ \forall c < d$

Esponenziali

$f(n) = a^n$
$a > 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^d} = \infty$

$a^n = \omega(n^d)\ \forall d > 0$
$\Rightarrow a^n = \Omega(n^d)\ \forall d > 0$

Logaritmi

$f(n) = \log_b n \quad b > 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_b n)^c}{n^d} = 0, \forall c, d \geq 1$

$(\log_b n)^c = o(n^d)\ \forall c, d \geq 1$
$\Rightarrow (\log_b n)^c = O(n^d)\ \forall c, d \geq 1$

Fattoriali

$f(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$n! = o(n^n) \Rightarrow n! = O(n^n)$
$n! = \omega(a^n) \Rightarrow n! = \Omega(a^n)\ \forall a > 0$

Approfondimento: notazione asintotica per gli algoritmi di Fibonacci (in funzione del **valore** di input)

	Numero di linee di codice	Occupazione di memoria
fibonacci1	$1 = \Theta(1)$	$1 = \Theta(1)$
fibonacci2	$3F_n - 2 \approx \Phi^n = \Theta(\Phi^n)$	$\approx \Phi^n = \Theta(\Phi^n)$ (*)
fibonacci3	$2n = \Theta(n)$	$n+1 = \Theta(n)$
fibonacci4	$4n-5 = \Theta(n)$	$4 = \Theta(1)$
fibonacci5	$2n+1 = \Theta(n)$	$5 = \Theta(1)$
fibonacci6	$\log n \le T(n) \le 4(1+\log n) \Rightarrow T(n) = \Theta(\log n)$	$\approx \log n = \Theta(\log n)$ (*)

* per le variabili di lavoro delle chiamate ricorsive

Domande di approfondimento

- Perché la tabella precedente non illustra correttamente la complessità temporale dei vari algoritmi di Fibonacci?
- Qual è la complessità temporale in notazione asintotica degli algoritmi `Fibonacci2, Fibonacci4 e Fibonacci6` in funzione della rappresentazione dell'input e non del valore di input?